ИНФОПЛАСТ™
www.infoplast.ru

АЛГЕБРА

часть 1

Свойства степеней

Для любых m, n и $a>0, b>0$ верны равенства:

$a^0=1;\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n};\quad a^m:a^n=a^{m-n};$

$(a^m)^n=a^{mn};\quad (ab)^n=a^nb^n;$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n};\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Модуль

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, \text{если } a\ge 0,\\ -a, \text{если } a<0\end{cases}$$

Основные свойства модуля:

$|a|\ge 0;\quad |a|-|b|\le|a\pm b|\le|a|+|b|;$

$|-a|=|a|;\quad |a-b|=|b-a|.$

Формулы сокращенного умножения

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ или

$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b);$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);$

$(a\pm b\pm c)^2=a^2+b^2+c^2\pm$
$\pm 2ab\pm 2ac+2bc;$

$(a\pm b)^2=(a\pm b)(a\pm b);$

$(a-b)^2=(b-a)^2$

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых $a\ge 0$ и $b\ge 0$ верны равенства:

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k};$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\ne 0);\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a};$

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k};\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a;$

$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$, если $0\le a<b;$

$\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|;\quad \sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $m\in Z, n\in N$

Если $m<0$, то $a>0$, если $m>0$, то $a\ge 0$

Начала математического анализа

Прогрессии

1. *Арифметическая* $\left(\div\right)$

(a_1 – первый член, d – разность, n – число членов, a_n – n-й член, S_n – сумма n первых членов)

$a_n=a_1+d(n-1);\quad a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2};$

$d=a_{n+1}-a_n;\quad d=\frac{a_n-a_m}{n-m},\ (n\ne m);$

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n;$

$a_n+a_m=a_p+a_q$, где $n+m=p+q$.

2. *Геометрическая* $\left(\div\!\div\right)$

b_1 – первый член, b_n – n-й член $(b_n\ne 0)$, n – число членов, q – знаменатель ($q\ne 0$), S_n – сумма n первых членов

$b_n=b_1\cdot q^{n-1};\quad b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1},\ b_n\ne 0;$

$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{b_1-b_nq}{1-q}$ при $q\ne 1;$

$S_n=n\cdot b_1$ при $q=1;$

$q=\frac{b_{n+1}}{b_n};\quad q^{n-m}=\frac{b_n}{b_m};$

$b_nb_m=b_pb_q$, где $n+m=p+q$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии $S=\frac{b_1}{1-q},\quad |q|<1$

Сравнение средних величин n положительных чисел

$(a_i>0, n\in Z)$

Среднее арифметическое $\frac{a_1+a_2+\mathrm{K}+a_n}{n}$

Среднее геометрическое $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\mathrm{K}\cdot a_n}$

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\mathrm{K}\cdot a_n}\le\frac{a_1+a_2+\mathrm{K}+a_n}{n}$$

Производная

Производные некоторых функций
(a, b, k, C – постоянные)

$C'=0;\quad (kx+b)'=k;$

$x'=1;\quad (x^n)'=n\cdot x^{n-1};$

$(\sin x)'=\cos x;\quad (\cos x)'=-\sin x;$

$(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x};\quad (\mathrm{ctg}\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$

$(\ln x)'=\frac{1}{x};\quad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$

$(e^x)'=e^x;\quad (a^x)'=a^x\cdot\ln a;$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\mathrm{arctg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2};\ (\mathrm{arcctg}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования
(u, v – функции, C – постоянная)

$(Cv)'=Cv';\quad (u+v)'=u'+v';$

$(uv)'=u'v+uv';\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2};$

$(g(f(x)))'=g'(f(x))\cdot f'(x),$

где $g(f(x))$ – сложная функция.

Геометрический смысл производной

$f'(x_0)=\mathrm{tg}\,\alpha=k$

Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

Физический смысл производной

$v(t)=s'(t)$

Скорость – производная от координаты по времени.

$a(t)=v'(t)$

Ускорение – производная от скорости по времени.

Уравнение касательной

Уравнение касательной к графику функции f в точке графика с абсциссой x_0

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Первообразная и интеграл

Таблица первообразных некоторых функций
(a, k, C – постоянные)

Функция f(x)	Первообразная F(x)
k	$kx+C$
$x^n,\ (n\in Z, n\ne -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\,x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\,x+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
e^x	e^x+C
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$

Правила нахождения первообразных:

1. Если F – первообразная для f, а G – первообразная для g, то $F+G$ есть первообразная для $f+g$.
2. Если F – первообразная для f, а k – постоянная, то функция kF есть первообразная для kf.
3. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $k\ne 0$ и b – постоянные, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для $f(kx+b)$.

Формула Ньютона – Лейбница

Если F – первообразная для f на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

Некоторые свойства интеграла

$$\int_a^b kf(x)\,dx=k\cdot\int_a^b f(x)\,dx;$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

Тригонометрия

Основные формулы

$\sin^2 x+\cos^2 x=1;\quad 1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\quad \operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x},\ x\neq\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1,\ x\neq\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z;\quad 1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x\neq\pi n,\ n\in Z.$

Формулы сложения

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y;$

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y;$

$\operatorname{tg}(x\pm y)=\dfrac{\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg} y}{1\mp\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y},\ x,\ y,\ x\pm y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

Формулы для кратных углов

$\sin 2x=2\sin x\cos x;\quad \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x;$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x;\quad \operatorname{tg} 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

Формулы половинного аргумента

$\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2};\quad \cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2};$

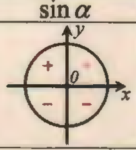
$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x},\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z$

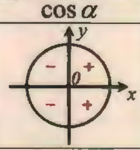
Формула дополнительного угла

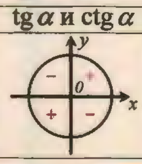
$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$ где $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$

Знаки тригонометрических функций

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$







Формулы преобразования суммы в произведение

$\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2};$

$\sin x-\sin y=2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2};$

$\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2};$

$\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2};$

$\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg} y=\dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y},\ x,\ y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{ctg} x\pm\operatorname{ctg} y=\dfrac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y},\ x,y\neq\pi n,\ n\in Z$

Формулы преобразования произведения в сумму

$\sin x\cdot\sin y=\dfrac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y));$

$\cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y));$

$\sin x\cdot\cos y=\dfrac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$

Универсальная подстановка

$\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)},\quad \sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)},$

$x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z$

Формулы приведения

α	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$	$\dfrac{\pi}{2}+\alpha$	$\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$	$\dfrac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс

$\arcsin(-x)=-\arcsin x;\quad \arccos(-x)=\pi-\arccos x;$

$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x;\quad \operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x;$

$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ при $|x|\le 1;$ $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\dfrac{\pi}{2};$

$\sin(\arcsin x)=x$ при $|x|\le 1;$ $\cos(\arccos x)=x,$ если $|x|\le 1;$

$\arcsin(\sin x)=x$ при $|x|\le\dfrac{\pi}{2};$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x$ при $|x|<\dfrac{\pi}{2};$

$\arccos(\cos x)=x$ при $0\le x\le\pi;$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$ при $x\in R;$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x;\quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)=x,$ если $0<x<\pi.$

α	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin\alpha$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\arccos\alpha$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

α	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg}\alpha$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\operatorname{arcctg}\alpha$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
α, рад	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

Четность функций

$\cos(-x)=\cos x;\quad \sin(-x)=-\sin x;$

$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x;\quad \operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x$

Информационно-справочная таблица

г. Москва, Каширское шоссе, 21

E-mail: mail@infoplast.ru
Http://www.infoplast.ru

4607061650111

Подписано в печать 09.02.09. Тираж 4000 экз. Заказ № 34555. Издатель ООО «Инфопласт», Москва, Каширское шоссе, 21. Тел./факс: 8 (495) 730-01-87. Типография ООО «Вива-Стар». 107023, Москва, ул. Электрозаводская, 20.

ИНФОПЛАСТ™
www.infoplast.ru

АЛГЕБРА

часть 2

Логарифмы

$\log_a b = c$ (где $b>0$, $a>0$, $a \neq 1$) тогда и только тогда, когда $a^c = b$.

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

Свойства логарифмов

$(a>0, a\neq 1, b>0, c>0)$

$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$;

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$;

$\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

$\log_a b^k = k \cdot \log_a b$;

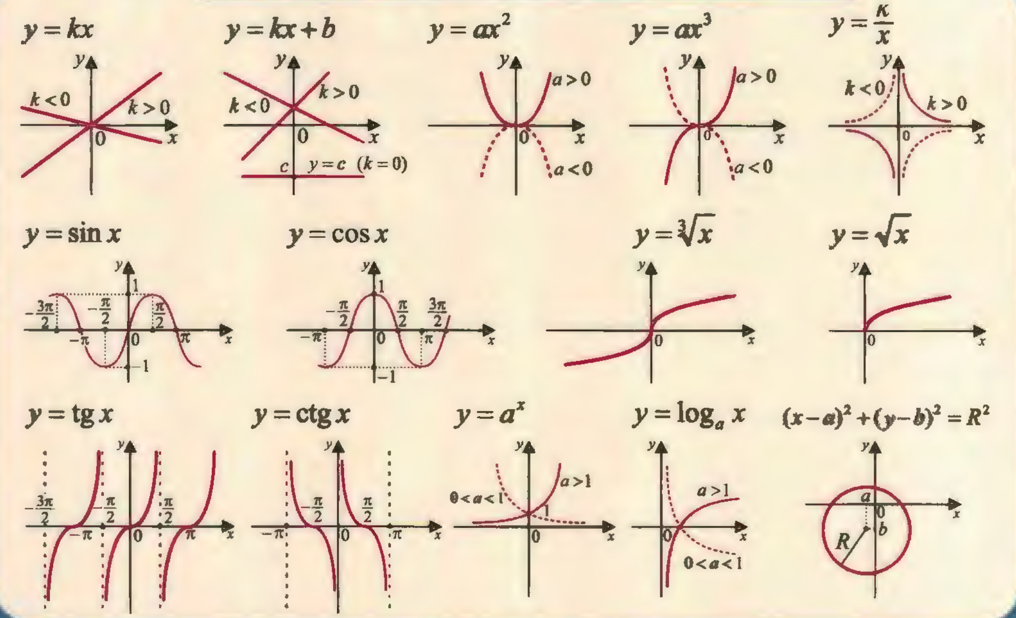
если k-четное: $\log_a b^k = k \cdot \log_a |b|$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c \neq 1)$;

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ $(b \neq 1)$;

$\log_{a^n} b^k = \dfrac{k}{n} \cdot \log_a b$ $(n \neq 0)$.

Графики некоторых элементарных функций



Некоторые методы решения уравнений

Квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$D = b^2 - 4ac$ – *дискриминант* квадратного уравнения.

Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Если $D = 0$, то уравнение имеет 1 корень

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Если $D > 0$, то уравнение имеет 2 корня:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

Теорема Виета

Если приведённое квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 (т.е. $D \geq 0$), то

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Теорема, обратная теореме Виета

Если числа m и n таковы, что $m+n=-p$ и $m \cdot n = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

Квадратное уравнение с чётным вторым коэффициентом

$$ax^2 + 2kx + c = 0, \text{ где } b = 2k$$

$$D^* = k^2 - ac, \quad \left(D^* = \frac{1}{4}D\right)$$

Если $D^* > 0$, то $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{D^*}}{a}$;

если $D^* = 0$, то $x = -\dfrac{k}{a}$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

Если x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Уравнения с модулем

1. $|x| = a$
   - если $a < 0$, то решений нет;
   - если $a = 0$, то $x = 0$;
   - если $a > 0$, то $x = \pm a$.
2. $|x - b| = a$
   - если $a < 0$, то решений нет;
   - если $a = 0$, то $x = b$;
   - если $a > 0$, то $x = \pm a + b$.
3. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$
4. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \geq 0. \end{array}\right.$

Показательные уравнения

1. $a^x = b$, $(a > 0, a \neq 1)$
   - если $b > 0$, то $x = \log_a b$
   - если $b \leq 0$, то решений нет
2. $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b$,
   где $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1$

   В частности, уравнение

   $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
3. $(u(x))^{f(x)} = (u(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (u(x)) > 0, \\ (u(x)) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{array}\right.$

Логарифмические уравнения

(при $a > 0, a \neq 1$)

1. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$
2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \left(\left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{array}\right.\right)$

(Для решения данного уравнения переходят только к [illegible] из этих систем (той, которая проще)).

Уравнение вида $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{array}\right.$

Иррациональные уравнения

1. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{array}\right.$
2. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \ (\text{или } g(x) \geq 0) \end{array}\right.$

Тригонометрические уравнения

1. $\sin x = a$
   - если $|a| > 1$, то решений нет;
   - если $|a| \leq 1$, то

     $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$

   Частные случаи:
   - $\sin x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
   - $\sin x = 0$, $x = \pi n, n \in Z$
   - $\sin x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
2. $\cos x = a$
   - если $|a| > 1$, то решений нет;
   - если $|a| \leq 1$, то

     $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

   Частные случаи:
   - $\cos x = 1$, $x = 2\pi n, n \in Z$
   - $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
   - $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$
3. $\operatorname{tg} x = a$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$
4. $\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$

Некоторые методы решения неравенств

Квадратные неравенства

$(a \neq 0)$

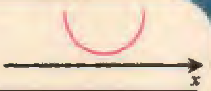
(приводимые к виду $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c \geq 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c \leq 0$)

Графиком функции $f(x) = ax^2+bx+c$ является парабола; координаты вершины

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = f(x_0) = -\frac{D}{4a}$$

Для решения квадратного неравенства вычисляют дискриминант D и определяют корни квадратного трёхчлена.

- $D<0$ и $a>0$



Неравенство	Ответ
$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c \geq 0$	$x \in R$
$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c \leq 0$	$x \in \varnothing$

- $D<0$ и $a<0$

Неравенство	Ответ
$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c \geq 0$	$x \in \varnothing$
$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c \leq 0$	$x \in R$

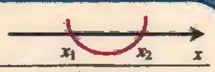
- $D=0$ и $a>0$

Неравенство	Ответ
$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$
$ax^2+bx+c \geq 0$	$x \in R$
$ax^2+bx+c<0$	$x \in \varnothing$
$ax^2+bx+c \leq 0$	$x = x_0$

- $D=0$ и $a<0$

Неравенство	Ответ
$ax^2+bx+c>0$	$x \in \varnothing$
$ax^2+bx+c \geq 0$	$x = x_0$
$ax^2+bx+c<0$	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$
$ax^2+bx+c \leq 0$	$x \in R$

- $D>0$ и $a>0$



Неравенство	Ответ
$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$
$ax^2+bx+c \geq 0$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty)$
$ax^2+bx+c<0$	$(x_1; x_2)$
$ax^2+bx+c \leq 0$	$[x_1; x_2]$

- $D>0$ и $a<0$

Неравенство	Ответ
$ax^2+bx+c>0$	$(x_1; x_2)$
$ax^2+bx+c \geq 0$	$[x_1; x_2]$
$ax^2+bx+c<0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$
$ax^2+bx+c \leq 0$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty)$

Неравенства с модулем

1. $|x-b|<a$
   - если $a \leq 0$, то решений нет;
   - если $a>0$, то $b-a<x<b+a$
2. $|x-b| \geq a$
   - если $a \leq 0$, то $x \in R$;
   - если $a>0$, то $\left[\begin{array}{l} x \geq b+a, \\ x \leq b-a \end{array}\right.$
3. $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x) \end{cases}$
4. $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x), \\ f(x)<-g(x) \end{array}\right.$
5. $|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$

Иррациональные неравенства

1. $\sqrt{x}<a$
   - если $a \leq 0$, то решений нет;
   - если $a>0$, то $0 \leq x<a^2$
2. $\sqrt{x}>a$
   - если $a<0$, то $x \geq 0$;
   - если $a=0$, то $x>0$;
   - если $a>0$, то $x>a^2$
3. $\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g^2(x) \end{cases}$
4. $\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x)>g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
5. $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Показательные неравенства

1. $a^{f(x)}<m$
   - если $m \leq 0, a>0, a \neq 1$, то решений нет;
   - если $m>0, 0<a<1$, то $f(x)>\log_a m$;
   - если $m>0, a>1$, то $f(x)<\log_a m$
2. $a^{f(x)}>m$
   - если $m \leq 0, a>0, a \neq 1$, то $x \in D(f)$;
   - если $m>0, 0<a<1$, то $f(x)<\log_a m$;
   - если $m>0, a>1$, то $f(x)>\log_a m$
3. $a^{f(x)}>a^{g(x)}$
   - если $a>1$, то $f(x)>g(x)$;
   - если $0<a<1$, то $f(x)<g(x)$

Логарифмические неравенства

$(m \in R)$

1. $\log_a f(x)<m$
   - если $0<a<1$, то $f(x)>a^m$;
   - если $a>1$, то $\begin{cases} f(x)<a^m, \\ f(x)>0 \end{cases}$
2. $\log_a f(x)>m$
   - если $0<a<1$, то $\begin{cases} f(x)<a^m, \\ f(x)>0; \end{cases}$
   - если $a>1$, то $f(x)>a^m$
3. $\log_a f(x)>\log_a g(x)$
   - если $0<a<1$, то $\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0; \end{cases}$
   - если $a>1$, то $\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$
4. $\log_{h(x)} f(x)>\log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x)>0, \\ h(x)<1, \\ f(x)<g(x), \\ f(x)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} h(x)>1, \\ f(x)>g(x), \\ g(x)>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Комбинаторика и бином Ньютона

Число перестановок из n элементов

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Число сочетаний из n элементов по m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}; \quad C_n^0 = 1$$

Свойства сочетаний

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \quad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Число размещений из n элементов по m

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$$

или

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$$

где $n \in N$ и $C_n^k a^{n-k} b^k = T_{k+1}$ есть $(k+1)$ – й член в разложении бинома $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$

Сумма биноминальных коэффициентов равна 2^n:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

Информационно-справочная таблица

г. Москва, Каширское шоссе, 21

E-mail: mail@infoplast.ru
Http://www.infoplast.ru

Тел.: (095) 320-04-09
Факс: (095) 320-04-08

4607061650128

ОБРАЗОВАНИЕ

ИНФОПЛАСТ™

www.infoplast.ru

АЛГЕБРА

Часть 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Определение комплексного числа

Определение 1. Числа вида $z=a+bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, будем называть *комплексными*.

Обозначение $a=\mathrm{Re}\,z$, $b=\mathrm{Im}\,z$. Числа $z=a+ib$ и $\bar{z}=a-ib$ называют *сопряженными*. Запись комплексного числа в виде $a+bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Число a будем назвать *действительной частью* комплексного числа, *bi – мнимой частью* комплексного числа, *b – коэффициентом при мнимой части*. Возможны случаи, когда действительные числа a и b могут быть равными нулю. Если $a=0$, то комплексное число bi называется *чисто мнимым*. Если $b=0$, то комплексное число $a+bi$ равно a и называется *действительным*. Если $a=0$ и $b=0$ одновременно, то комплексное число $0+0i$ равно нулю. *Действительные числа и чисто мнимые числа представляют собой частные случаи комплексного числа.*

Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ условились считать *равными* тогда и только тогда, когда в отдельности равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т. е. $a+bi=c+di$, если $a=c$ и $b=d$.

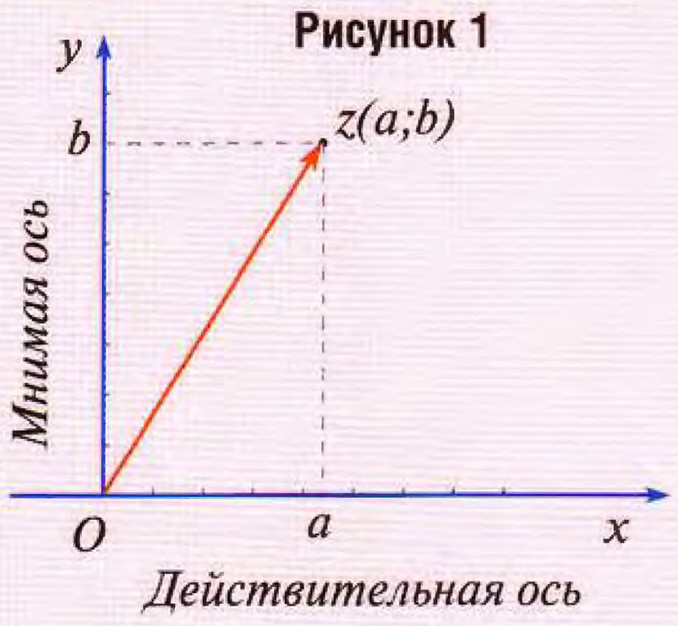
Число i будем называть *мнимой единицей* (i – начальная буква французского слова *imaginaire* – «мнимый»), а равенство $i^2=-1$ будем считать определением мнимой единицы.

Геометрическая интерпретация комплексного числа

Комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить точкой z плоскости с координатами $(a;b)$ *(рис. 1)*. Для этого выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Оси $\boldsymbol{Ox}$ и $\boldsymbol{Oy}$ называются соответственно действительной и мнимой осью.

Каждой точке плоскости с координатами $(a;b)$ соответствует один и только один вектор с началом $O(0;0)$ и концом $z(a;b)$. Поэтому комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить в виде вектора с началом в точке $O(0;0)$ и концом в точке $z(a;b)$.

Рисунок 1



Тригонометрическая форма комплексного числа

Комплексное число $z=a+bi$ изображено в виде вектора с началом в точке $O(0;0)$ и концом $z(a;b)$ *(рис. 3)*.

Определение 3. *Модулем* комплексного числа $z=a+bi$ называется длина вектора, которую можно найти по формуле $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, (модуль комплексного числа обозначен буквой r).

Определение 4. *Аргументом* комплексного числа называется угол φ, который образует вектор с положительным направлением оси абсцисс. Величину угла φ можно найти с помощью формул: $\cos\varphi=\dfrac{a}{r}$ и $\sin\varphi=\dfrac{b}{r}$. Эта система имеет бесчисленное множество решений вида $\varphi+2\pi k$, где k – любое целое число. Таким образом, любое комплексное число z имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Если $k=0$, то мы получим главное значение аргумента φ, которое и будем называть аргументом комплексного числа.

Если в запись комплексного числа z вместо a и b подставить значения $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$, то получим новую форму записи комплексного числа: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, которая называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической:

1. Находят модуль комплексного числа r, для чего используют формулу $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

2. Для нахождения φ сначала определяют геометрически, в какой четверти находится точка z.

3. Составляют уравнения $\cos\varphi=\dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{r}$ и по решению одного из них находят угол φ.

4. Записывают комплексное число z в тригонометрической форме.

Показательная форма комплексного числа

Если комплексному числу $z=(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, модуль которого равен 1, поставить в соответствие показательное выражение $e^{i\varphi}$, то получим соотношение $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, которое называется **формулой Эйлера**.

Любое комплексное число z можно записать в виде $z=re^{i\varphi}$. Эта форма записи комплексного числа называется *показательной формой*.

Итак, существуют три формы записи комплексного числа:

$z=a+ib$ – алгебраическая форма;

$z=(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма;

$z=re^{i\varphi}$ – показательная форма.

Правила действия с комплексными числами

Причем $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=i$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-i$, $i^{4n}=1$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$

- Сложение комплексных чисел $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$, $z_1+z_2=a_1+ib_1+a_2+ib_2=a_1+a_2+i(b_1+b_2)$;
- Разность комплексных чисел $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$, $z_1-z_2=a_1+ib_1-a_2-ib_2=a_1-a_2+i(b_1-b_2)$;
- Умножение комплексных чисел $z_1z_2=a_1a_2-b_2b_1+i(b_1a_2+b_2a_1)$
- $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\dfrac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$, $(z_2\neq 0)$.

Представление суммы, произведения и частного. Степени и корня.

Если даны $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то $z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$;

$\dfrac{z_1}{z_2}=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$, $z^n=r^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$; ($n$ – целое число) **(формула Муавра)**.

Если n – натуральное число и $z\neq 0$, то $\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$,

где $\sqrt[n]{|z|}$ – арифметический корень из положительного числа $|z|$, $\varphi=\arg z$ и $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Отметим, что $\sqrt[n]{1}=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $\sqrt[n]{-1}=\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{n}+\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{n}$, $(n=1, 2, \ldots; k=0, 1, \ldots, n-1)$.

Последовательности

Если рассмотреть ряд натуральных чисел 1, 2, 3, …, n, … и заменить каждое натуральное число n в этом ряду некоторым числом a_n, следуя некоторому закону, то мы получим новый ряд чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$, краткое обозначение $\{a_n\}$ и называемый числовой последовательностью.

Ограниченные последовательности

1) Ограниченная сверху, то есть существует B, так, что $a_n\le B$, для любого $n\in N$.

2) Ограниченная снизу, то есть существует A, так, что $A\le b_n$, для любого $n\in N$.

3) Ограниченная, то есть существует A, B, так, что $A\le a_n\le B$, для любого $n\in N$, $\Leftrightarrow$ существует $C>0$, так, что $|a_n|\le C$, для любого $n\in N$.

Монотонные последовательности

1) возрастающая $a_n<a_{n+1}$, $\forall\ n\in N$.

2) убывающая $a_n>a_{n-1}$, $\forall\ n\in N$.

3) не возрастающая $a_n\ge a_{n+1}$, $\forall\ n\in N$.

4) не убывающая $a_n\le a_{n+1}$, $\forall\ n\in N$.

Пределы последовательности

Определение: число a называется пределом числовой последовательности a_n, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$, найдется натуральный номер N такой, что для всех чисел $n\ge N$ выполняется модуль разности $|a_n-a|<\varepsilon \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N:\forall\ n\ge N\Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$.

Начиная с этого номера N все числа этой последовательности попадают в ε окрестность числа a. Другими словами, начиная с номера N вне интервала $a-\varepsilon; a+\varepsilon$ может находиться не более конечного числа членов последовательности.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

Теоремы о пределах числовых последовательностей

Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – две сходящиеся последовательности, то: $\lim\limits_{n\to\infty}c\cdot a_n=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c\cdot a$, ($c$ – число);

Теорема о пределе суммы: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\pm b$;

Теорема о произведение пределов: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\cdot b$;

Теорема о пределе частного: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, $b\neq 0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$.

Определение предела числовой функции. Односторонние пределы. Свойства пределов

Число A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, $(x_n \neq x_0)$, сходящейся к x_0 (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in N$, сходится к числу A, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Геометрический смысл предела этой функции, что для всех точек x, достаточно близких к точке x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A.

Односторонние пределы.
Считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0.

Число A_1 называется **пределом функции $y=f(x)$ слева** в точке x_0, если для любого $\varepsilon<0$ существует число $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$ такое, что при $x\in(x_0-\sigma; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x)-A_1|<\varepsilon$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$.

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \sigma=\sigma(\varepsilon),\ \forall x\in(x_0-\sigma; x_0) \Rightarrow |f(x)-A_1|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$$

Пределом функции справа называется

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \sigma=\sigma(\varepsilon),\ \forall x\in(x_0; x_0+\sigma) \Rightarrow |f(x)-A_2|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$$

Свойства пределов.
При условии, что пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ существуют и конечны:

1) если предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Rightarrow f(x) = a+\alpha$ функция равна этому числу плюс б.м.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\sigma>0: |x-x_0|<\sigma \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$,

ε – сколь угодно малое число, $|f(x)-a|=\alpha$; $f(x)=a+\alpha$.

2) сумма конечного числа б.м. чисел есть б.м. число;

3) предел суммы равен сумме пределов $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

4) предел произведения равен произведению пределов
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$;

5) константы можно выносить за знак предела $\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ($C$ – число);

6) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$;

7) если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (f и g называются предельно эквивалентными при стремлении x к x_0);

8) Замена переменной: пусть даны взаимообратные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Тогда
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{t\to\varphi(x_0)} f(\psi(t))$. В частности $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{t\to\infty} f\left(\dfrac{1}{t}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0} f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Теорема: $f(x)>g(x)$, в $O^\circ(x_0)$ и $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ и $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = c$. Тогда $b\geq c$.

Теорема: $f(x)\leq\gamma(x)\leq g(x)\ \forall\ x\in O^\circ(x_0)$ и $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ и $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$.
Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \gamma(x) = b$.

Замечательные пределы

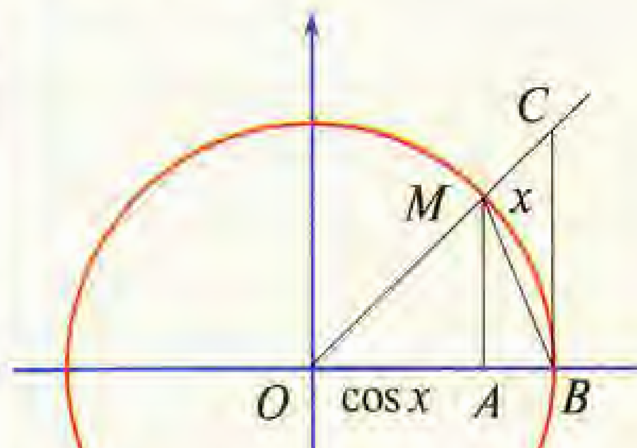
Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла MOB через X. Пусть $0<X<\pi/2$. На рисунке $|AM|=\sin x$, дуга MB численно равна центральному углу X, $|BC|=\mathrm{tg}x$. Тогда

$S_{\Delta MOB} < S_{\text{сектора} MOB} < S_{\Delta COB}$, $\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{2}tgx$.

Разделим все на $\dfrac{1}{2}\sin x > 0$ и получим: $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$,
$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.

Т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, то по признаку существования пределов следует $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.



Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Пусть $x\to\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n\leq x<n+1$, $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{n}$,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Если $x\to\infty$, то $n\to\infty$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+n}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$$

По признаку о существовании пределов: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Следствия второго замечательного предела

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$ $(a>0,\ a\neq 1)$, в частности $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ $(a>0)$, в частности $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Важные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{b^x} = 0\ (a\in R,\ b>1);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0\ (a>0,\ a\neq 1,\ \varepsilon>0);$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Непрерывные функции и их свойства. Точка разрыва функций, классификация

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Это означает:

- функция определена в точке x_0 и в ее окрестности;
- функция имеет предел при $x\to x_0$;
- предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство.

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции, то есть в функции $f(x)$ вместо аргумента x подставить предельное значение x_0.

Точки разрыва функции – это точки в которых нарушается непрерывность функции.

<u>Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва 1 рода</u> функции $y=f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$.

При этом, если:

- $A_1=A_2$ то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва;
- $A_1\neq A_2$ то точка x_0 называется точкой конечного разрыва.

$|A_1-A_2|$ называется скачком функции.

<u>Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва 2 рода</u> функции $y=f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует, либо равен бесконечности.

Теоремы о среднем. Правило Лопиталя

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей 0/0 и ∞/∞, который основан на применении производных.

Правило Лопиталя, при 0/0.
Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращается в нуль в этой точке:
$f(x_0)=\varphi(x_0)=0$.

Пусть $\varphi'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0.

Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$,

то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$.

Применим к функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ теорему Коши для отрезка $[x_0; x]$, лежащего в окрестности точки x_0, тогда $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$,

где c лежит между x_0 и x.

При $x\to x_0$ величина c также стремится к x_0; перейдем в предыдущем равенстве к пределу:
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$, то $\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)} = l$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = l$.

(предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует)

Правило Лопиталя, при ∞/∞.
Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме точки x_0), в этой окрестности
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$, $\varphi'(x)\neq 0$.

Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$,

то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$.

Неопределенности вида $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^∞; ∞^0; 0^0 сводятся к двум основным.

Например, $0\cdot\infty$

Пусть $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} = [\tfrac{0}{0}]$$

Информационно-справочная таблица

г. Москва, Каширское шоссе, 21
E-mail: mail@infoplast.ru,
http://www.infoplast.ru
Тел.: (095) 320-94-89/88

Подписано в печать 30.03.06. Тираж 4000 экз. Заказ №3106. Издатель ООО «Инфопласт», Москва, Каширское шоссе, 21. Типография ООО «Вива-Стар», 107023, Москва, ул. Электрозаводская, 20.

АЛГЕБРА

Часть 4

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Размерность и базис линейного пространства

Рассмотрим непустое множество элементов, которые будем обозначать через $x, y, z, \ldots$ и множество действительных чисел. На этом множестве введем две операции (сложение и умножение). Пусть эти две операции подчиняются аксиомам:

1. $x+y=y+x$;
2. $(x+y)+z=x+(y+z)=$ $=x+y+z$;
3. $x+0=x$;
4. $x+(-x)=0$;
5. $1\cdot x=x$;
6. $\alpha(\beta x)=\beta(\alpha x)=\alpha\beta x$;
7. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;
8. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

$V;\ x, y, z, \ldots \in V$

Множество V с двумя операциями, удовлетворяющее аксиомам называется **линейным пространством**.

Элементы линейного пространства называются векторами, обозначаются $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Существует единственный нулевой элемент, для каждого элемента существует единственный противоположный.

Линейная зависимость и независимость системы векторов

Пусть имеется n векторов: $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_n$.

Составим линейную комбинацию:

$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{y}$.

$\vec{y}=0$, если $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$ $\Rightarrow$ система n векторов – линейно-зависима.

Если среди n векторов какие-то k линейно-зависимы, то вся система векторов является линейно-зависимой.

Если система n векторов линейно-независима, то любая часть из этих векторов будет тоже линейно-независимой.

Размерность и базис линейного пространства

Пусть система n векторов линейно-независима, а любая система $n+1$ векторов – линейно-зависима, тогда число n называют размерностью пространства.

$$\dim V=n$$

Система этих n линейно-независимых векторов называется базисом линейного пространства. Рассмотрим систему $n+1$ векторов.

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_n, \vec{y}$

$a_1\vec{x}_1+a_2\vec{x}_2+\ldots+a_n\vec{x}_n=\vec{y}$

Такое представление называется разложение $\vec{y}$ по базису, а числа $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ называют координатами вектора. Разложение любого вектора в выбранном базисе – единственно.

2. Матрица перехода от базиса к базису. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису

$$\boxed{\alpha=T\alpha'}$$

n – мерное пространство, V_n – базис, состоящий из n векторов. В пространстве есть базисы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$. Введем матрицу перехода от $\vec{e}$ к $\vec{e}\,'$.

$$\begin{cases} \vec{e}\,'_1=t_{11}\vec{e}_1+t_{12}\vec{e}_2+\ldots+t_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{e}\,'_2=t_{21}\vec{e}_1+t_{22}\vec{e}_2+\ldots+t_{2n}\vec{e}_n \\ \ldots \\ \vec{e}\,'_n=t_{n1}\vec{e}_1+t_{n2}\vec{e}_2+\ldots+t_{nn}\vec{e}_n \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{x}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n \\ \vec{x}\,'=\alpha'_1\vec{e}\,'_1+\alpha'_2\vec{e}\,'_2+\ldots+\alpha'_n\vec{e}\,'_n \end{cases}$$

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \ldots t_{1n} \\ \ldots & \\ t_{n1} & t_{n2} \ldots t_{nn} \end{pmatrix} \quad \vec{e}\xrightarrow{T}\vec{e}\,' \qquad x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \ldots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \quad y=\begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\\ \ldots\\ \alpha'_n\end{pmatrix} \quad T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \ldots t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} \ldots t_{2n} \\ \ldots & \\ t_{n1} & t_{n2} \ldots t_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\\ \ldots\\ \alpha'_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \ldots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

3. Евклидово пространство. Длина вектора. Угол между векторами

Рассмотрим линейное пространство V, в котором уже есть 2 операции (сложение и умножение). В этом пространстве введем еще одну операцию. Она будет удовлетворять следующим аксиомам: **1.** $(\vec{x};\vec{y})=(\vec{y};\vec{x})$; **2.** $(\vec{x}+\vec{y};\vec{z})=(\vec{x};\vec{y})+(\vec{y};\vec{z})$;

3. $(\lambda\vec{x};\vec{y})=\lambda(\vec{x};\vec{y})$; **4.** $(\vec{x};\vec{x})=(\vec{x}^2)\geq 0$. Указанная операция называется скалярным произведением векторов.

N – мерное линейное пространство с введенной операцией скалярного произведения, называется **Евклидовым пространством**. *Длиной* вектора называется арифметическое значение квадратного корня и скалярного квадрата: $|\vec{x}|=\sqrt{(\vec{x}^2)}$. Длина вектора удовлетворяет следующим условиям:

1. $|\vec{x}|\geq 0$, если $|\vec{x}|=0 \Rightarrow \vec{x}=0$;
2. $|\lambda\vec{x}|=|\lambda|\cdot|\vec{x}|$;
3. $|(\vec{x};\vec{y})|\leq|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$ – неравенство Коши-Буняковского
4. $|\vec{x}+\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|$ – неравенство треугольника

$$\left.\begin{array}{r} (\vec{x};\vec{y})\leq\vec{x}\,\vec{y} \\ \dfrac{|\vec{x};\vec{y}|}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}\leq 1 \\ -1\leq\dfrac{|\vec{x};\vec{y}|}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}\leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{|\vec{x};\vec{y}|}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}$$

4. Скалярное произведение векторов и его свойства

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется *число*, равное произведению этих векторов на косинус угла между ними.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi} \quad \boxed{\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}}$$

1. $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|$; **2.** $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$;

3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\,\vec{b}+\vec{a}\,\vec{c}$; **4.** $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

5. Векторное произведение векторов и его свойства

Три некомпланарных вектора образуют *правую тройку* если с конца третьего поворот от первого вектора ко второму совершается против часовой стрелки. Если по часовой – то *левую*.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который:

1. Перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. Имеет длину, численно равную площади параллелограмма, образованного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где $\varphi=(a,b)$

3. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Свойства:

1. $(\vec{a}\times\vec{b})=-(\vec{b}\times\vec{a})$;
2. $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$;
3. $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow(\vec{a}\times\vec{b})=0$;
4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

6. Смешанное произведение векторов и его свойства

Смешанное произведение записывают в виде: $\boxed{d=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$.

Смысл смешенного произведения: сначала два вектора векторно перемножают, а затем полученный скалярно перемножают с третьим вектором. Смешанное произведение представляет собой число – число. Результат смешанного произведения – объем параллелепипеда, образованного векторами.

Свойства:

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке сомножителей: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$
2. Смешанное произведение не изменится при перемене местами векторного и скалярного произведения: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$
3. Смешанное произведение меняет знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{b}$; $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{b}\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}$; $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}$
4. Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

$$\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{b}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Три вектора называются компланарными, если результат смешанного произведения равен нулю.

7. Линейные преобразования пространства. Матрица линейного преобразования. Связь между координатами образа и прообраза

Рассмотрим линейное пространство V, в котором каждому элементу x, в силу некоторого закона поставлен элемент этого же пространства.

$\vec{x}\xrightarrow{f}\vec{y} \Leftrightarrow \vec{y}=f(\vec{x})$, где $\vec{x}$ – прообраз, $\vec{y}$ – образ.

Каждому прообразу соответствует единственный образ. Каждый образ имеет единственный прообраз.

Линейное преобразование пространства, при котором существует взаимнооднозначные соответствия.

Биективное преобразование $\vec{y}=f(\vec{x})$ – называется линейным, если выполняются 2 условия:

1. $F(\vec{x}+\vec{y})=F(\vec{x})+F(\vec{y})$;
2. $F(\lambda\vec{x})=\lambda F(\vec{x})$.

$F(\lambda\vec{x}+\beta\vec{y})=\lambda F(\vec{x})+\beta F(\vec{y})$

Рассмотрим n-мерное линейное пространство

$(\vec{e}):\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$

$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$

Для того, чтобы задать линейные преобразования в этом пространстве достаточно задать это преобразование для базисных векторов.

$\vec{e}\,'_1=F(\vec{e}_1),\ \vec{e}\,'_2=F(\vec{e}_2)\ \ldots\ \vec{e}\,'_n=F(\vec{e}_n)$

$$\vec{y}=F(\vec{x})=F(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n)=$$
$$=x_1F(\vec{e}_1)+x_2F(\vec{e}_2)+\ldots+x_nF(\vec{e}_n)=$$
$$=x_1\vec{e}\,'_1+x_2\vec{e}\,'_2+\ldots+x_n\vec{e}\,'_n$$

Матрица линейного преобразования

Пусть F – линейное преобразование линейного пространства, переводящая базис $(\vec{e})$ в базис $(\vec{e}\,')$.

Т.к. $(\vec{e})$ – базис, то верны соотношения

$$\vec{e}\,'_1=a_{11}\vec{e}_1+a_{12}\vec{e}_2+\ldots+a_{1n}\vec{e}_n$$
$$\vec{e}\,'_2=a_{21}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\ldots+a_{2n}\vec{e}_n$$
$$\ldots$$
$$\vec{e}\,'_n=a_{n1}\vec{e}_1+a_{n2}\vec{e}_2+\ldots+a_{nn}\vec{e}_n$$

A – является матрицей линейного преобразования или линейным оператором пространства.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \vec{e}\,'_1 & \vec{e}\,'_2 & \ldots\ \vec{e}\,'_n \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ a_{2n} \\ \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Связь между координатами образа и прообраза

$\vec{x}, \vec{y}\in V;\ \vec{y}=f(\vec{x})$

В базисе $\vec{e}$ вектор $\vec{x}$ имеет координаты $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$.

$$\vec{y}=f(\vec{x})=f(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n)=\ldots$$
$$\ldots=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\ldots+y_n\vec{e}_n$$

$$(*)\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \\ \ldots \\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n \end{cases}$$

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\ \ldots\\ y_n\end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix} \quad \boxed{y=Ax}$$

Линейное преобразование – матрица линейного оператора. Каждому линейному преобразованию соответствует одна матрица линейного оператора и наоборот.

Если имеется квадратная матрица, значит задано линейное преобразование пространства.

8. Связь между координатами одного и того же линейного оператора в разных базисах

$\left(\vec{e}\right) \xrightarrow{T} \left(\vec{e}'\right)$ T – матрица перехода от e к e', то:

$\vec{y}=f(\vec{x})$

$x=Tx' \quad y=Ty'$

$(\vec{e})$ $(\vec{e}')$

$y=Ax \quad y'=Bx'$

$B=T^{-1}AT$

$Ax=ATx'$

$Ty'=ATx'$

$y'=T^{-1}ATx'$

$y'=Bx'$

Если линейный оператор имеет в базисе невырожденную матрицу T, матрица этого оператора в любом другом базисе не будет вырождена.

11. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до плоскости

$\Delta: Ax+By+Cz+D=0$

Прямая L: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

Пусть φ – угол между плоскостью и прямой. Тогда θ – угол между $\vec{n}(A;B;C)$ и $\vec{S}(m;n;p)$,

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{S}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{S}|}$

Найдем $\sin\varphi$, если $\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

$\sin\varphi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$, т.к. $\sin\varphi\ge 0$

$$\boxed{\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}$$

Расстояние от точки до плоскости

Дано:

$M_0(x_0;y_0;z_0)$,

$\Delta: Ax+By+Cz+D=0$

Расстояние d от точки M_0 до плоскости Δ равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ (где $M_1(x_1;y_1;z_1)$ – произвольная точка плоскости) на направление нормального вектора $\vec{n}=(A;B;C)$.

$$d=\left|np_{\vec{n}}\,\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=$$

$$=\dfrac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B+(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0-Ax_0-By_0-Cz_0}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$,

$D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

$$\boxed{d=\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Если плоскость задана уравнением:

$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0$,

то расстояние до плоскости находится по формуле:

$$\boxed{d=|x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p|}$$

9. Характеристическое уравнение линейного оператора. Собственные векторы линейного оператора и их свойства

Если в базисе $\vec{e}$ линейный оператор имеет матрицу A, а в базисе $(\vec{e}')$ оператор имеет матрицу B, $\Rightarrow \det(A-\lambda E)=\det(B-\lambda E)$,

λ – произвольное число $\ne 0$,

E – единичная матрица.

$$\det(B-\lambda E)=\det(T^{-1}AT-\lambda T^{-1}ET)=$$
$$=\det(T^{-1}(A-\lambda E)T)=\det T^{-1}\det(A+\lambda X);$$

$$\det T=\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn}\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \\ 0 & 0 \dots 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\end{pmatrix}$$

Если характеристически многочлен линейного оператора прировнять к 0, получим характеристическое уравнение линейного оператора.

Собственные векторы линейного оператора

Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором линейного оператора, если $\boldsymbol{AX=kX}$ оператор к $\vec{x}$, получим этот же $\vec{x}$, умноженный на некоторое k.

k – собственное число оператора $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0\end{pmatrix}$

$\vec{x}=\vec{e}_1-3\vec{e}$

$A\vec{x}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -3\end{pmatrix}=(-1)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 3\end{pmatrix}=-\vec{x}$

Каждый собственный вектор имеет единственное собственное число.

$$\left.\begin{matrix} Ax-k_1x \\ Ax-k_2x\end{matrix}\right\} \; k_1x=k_2x \Rightarrow (k_1-k_2)\vec{x}=0 \Rightarrow k_1=k_2$$

12. Поверхности второго порядка

Определение: Уравнение вида

$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{31}z+a_{44}=0$,

где a_{ij} (i,j=1...n) действительные числа, называется общим уравнением поверхности второго порядка.

В зависимости от параметра a_{ij} получаются следующие классические поверхности (все параметры положительные числа):

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – *трехосный эллипсоид;*

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – *однополосный гиперболоид;*

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – *двуполостный гиперболоид;*

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – *конус второго порядка;*

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ – *эллиптический параболоид;*

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ – *гиперболический параболоид;*

$x^2+y^2+z^2=0$ – *точки.*

Цилиндрические поверхности:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – *эллиптический цилиндр;*

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – *гиперболический цилиндр;*

$q^2=2ax$ – *параболический цилиндр;*

$a^2x^2-b^2y^2=0$ – *пара пересекающихся плоскостей;*

$x^2-a^2=0$ – *пара параллельных плоскостей;*

$x^2+y^2=0$ – *прямая.*

Все указанные уравнения называются каноническими.

Основным методом изучения поверхностей второго порядка – метод сечений, который состоит в построении линий (сечений) данных плоскостей в частности с плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

10. Плоскость в пространстве. Виды уравнения плоскостей. Угол между плоскостями

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно данному вектору

Пусть плоскость задана точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и вектором $\vec{n}(A;B;C)$, перпендикулярной этой плоскости.

Возьмем произвольную точку $M(x;y;z)$ и составим вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$. При любом расположении точки M на плоскости Q $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$, поэтому $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$.

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Общее уравнение плоскости

$\Delta: Ax+By+Cz+D=0$

- Если $D=0$, то данному уравнению удовлетворяет точка $O(0;0;0)$.
- Если $C=0$ то вектор $\vec{n}(A;B;0)\perp oz$. Следовательно, плоскость параллельна оси oz, если $B=0$ – то oy, если $A=0$ – то ox.
- Если $C=D=0$, то плоскость проходит через $O(0;0;0)$, параллельно оси oz. Аналогично при $A=D=0$ и $B=D=0$.
- Если $A=B=0$, то уравнение примет вид $z=-\dfrac{D}{C}$ плоскость параллельна плоскости Oxy.
- Если $A=B=D=0$, то уравнение имеет вид $z=0$. Это уравнение плоскости Oxy.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$K(x_1;y_1)$; $M(x_2;y_2)$; $N(x_3;y_3)$

Возьмем на плоскости точку $P(x;y;z)$.

Составим векторы:

$\overrightarrow{KP}=(x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1)$

$\overrightarrow{KM}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$

$\overrightarrow{KN}=(x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1)$

Эти векторы лежат в одной плоскости, следовательно они компланарны:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях отрезки, т.е. проходит через точки:

$$\begin{matrix} A(a;0;0) \\ B(0;b;0) \\ C(0;0;c)\end{matrix} \quad \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=0 \quad \boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1}$$

Нормальное уравнение плоскости

$$\boxed{d=|x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p|}$$

Информационно-справочная таблица

г. Москва, Каширское шоссе, 21

E-mail: mail@infoplast.ru,
http://www.infoplast.ru

Тел.: (095) 320-94-89/88

4607061651965

Подписано в печать 30.03.06. Тираж 4000 экз. Заказ №3106. Издатель ООО «Инфопласт», Москва, Каширское шоссе, 21. Типография ООО «Вива-Стар». 107023, Москва, ул. Электрозаводская, 20.

ОБРАЗОВАНИЕ

ИНФОПЛАСТ™

www.infoplast.ru

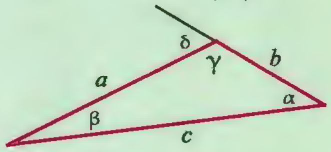
ГЕОМЕТРИЯ

часть 1

Треугольники

1. Произвольный треугольник

$c > b \Leftrightarrow \gamma > \beta$



Сумма углов треугольника

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

Внешний угол треугольника

$\delta=\alpha+\beta$

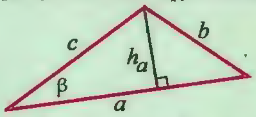
Теорема косинусов

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

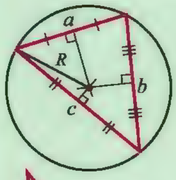
(где R – радиус описанной окружности).



$S=\frac{1}{2}ah_a \qquad S=\frac{1}{2}ac\sin\beta$

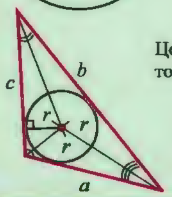
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$

где полупериметр $p=\frac{a+b+c}{2}$



Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров.

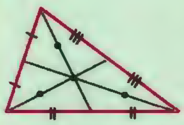
$R=\frac{abc}{4S}$



Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис.

$r=\frac{2S}{a+b+c}$

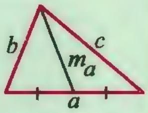
Некоторые свойства медиан, биссектрис и высот



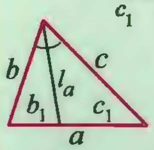
Медианы пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Длина медианы

$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$



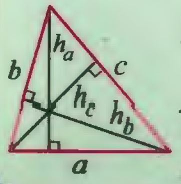
$\frac{b_1}{c_1}=\frac{b}{c}$



Длина биссектрисы

$l_a=\sqrt{bc-b_1c_1}$

$l_a=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$

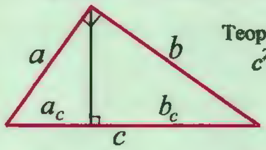


$h_a : h_b : h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$

$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$, *где r – радиус вписанной окружности.*

Прямоугольный треугольник

2. Прямоугольный треугольник



Теорема Пифагора.

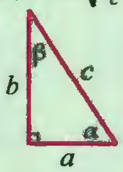
$c^2=a^2+b^2$

$S=\frac{ab}{2}$

$h=\frac{ab}{c}=\sqrt{a_cb_c};\quad a=\sqrt{a_cc};\quad b=\sqrt{b_cc}$

$\sin\alpha=\frac{b}{c};\quad \cos\alpha=\frac{a}{c}$

$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a}{b};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$



Если $\beta=30^\circ$, *то* $c=2a$.

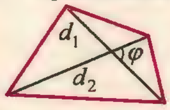
Радиус вписанной окружности:

$r=\frac{ab}{a+b+c},\quad r=\frac{a+b-c}{2}$

Радиус описанной окружности $R=\frac{c}{2}$

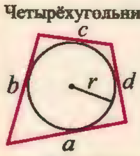
Четырехугольники

1. Произвольный четырёхугольник



$S=\frac{d_1d_2\sin\varphi}{2}$

Четырёхугольник, описанный около окружности



$a+c=b+d$

$S=\frac{a+b+c+d}{2}\cdot r$

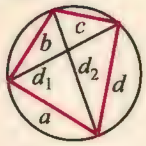
Четырёхугольник, вписанный в окружность

$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$

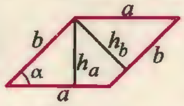
где $p=\frac{a+b+c+d}{2}$

Теорема Птолемея

$ac+bd=d_1d_2$

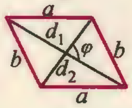


2. Параллелограмм



$S=ah_a=bh_b$

$S=ab\sin\alpha$



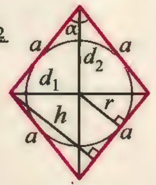
$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$

$S=\frac{d_1d_2\sin\varphi}{2}$

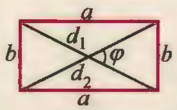
3. Ромб *(h – высота, d_1, d_2 – диагонали)*

$r=\frac{h}{2}=\frac{d_1d_2}{4a};\quad S=\frac{d_1d_2}{2}$

$S=ah=2ar=a^2\sin\alpha$

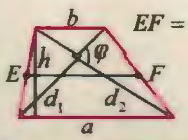


4. Прямоугольник



$S=ab=\frac{d^2\sin\varphi}{2}$

5. Трапеция *(h – высота, d_1, d_2 – диагонали)*



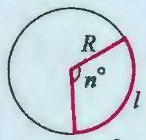
$EF=\frac{a+b}{2};\quad S=\frac{d_1d_2\sin\varphi}{2}$

$S=\frac{a+b}{2}\cdot h=EF\cdot h$

Окружность

Длина окружности $C=2\pi R$

Площадь круга $S=\pi R^2$



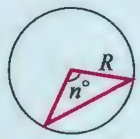
Площадь кругового сектора

$S=\frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot n^\circ$

длина дуги $l=\frac{\pi R}{180^\circ}\cdot n^\circ$

(n° – градусная мера центрального угла)

Площадь кругового сегмента



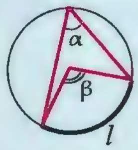
$S=\frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot n^\circ\pm\frac{1}{2}R^2\sin n^\circ$

знак «+» надо брать, когда $180^\circ<n^\circ<360^\circ$, *а знак «–» надо брать, когда* $0^\circ<n^\circ<180^\circ$,

(n° – градусная мера центрального угла)

Некоторые свойства вписанных углов:

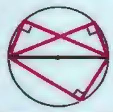
1. *Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу; (вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается).*



$\alpha=\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}l$

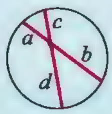
2. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.*

3. *Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые*

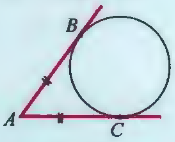


Соотношения между длинами хорд, отрезков касательных и секущих

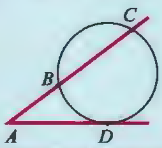
1. $ab=cd$



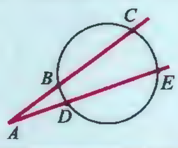
2. $AB=AC$



3. $AD^2=AB\cdot AC$



4. $AD\cdot AE=AB\cdot AC$



Правильные многоугольники

Площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей *(a – сторона, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности).*

	r	R	S
треугольник	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
квадрат	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a^2
шестиугольник	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
n-угольник	$\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a^2n}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$

Прямоугольная декартова система координат

на плоскости

1. Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
2. Координаты $(x; y)$ середины отрезка с концами $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$
3. Общее уравнение прямой, перпендикулярной вектору $\overline{n}(a;b)$
$$ax+by+c=0$$
4. Уравнение окружности с радиусом R и с центром в точке $(x_0; y_0)$
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$
5. Если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то координаты вектора: $\overline{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1)$
модуль вектора:
$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
6. Сложение векторов
$$\overline{a}(a_1;a_2)+\overline{b}(b_1;b_2)=\overline{c}(a_1+b_1;a_2+b_2)$$
7. Умножение вектора $\overline{(a_1;a_2)}$ на число λ
$$\overline{(a_1;a_2)}\,\lambda=\overline{(\lambda a_1;\lambda a_2)}$$
8. Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$
$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\varphi,$$
где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$
9. Скалярное произведение векторов $\overline{a}(a_1;a_2)$ и $\overline{b}(b_1;b_2)$
$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1b_1+a_2b_2$$
10. Косинус угла между векторами $\overline{a}(a_1;a_2)$ и $\overline{b}(b_1;b_2)$
$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$
11. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\overline{a}(a_1;a_2)$ и $\overline{b}(b_1;b_2)$
$$\overline{a}\cdot\overline{b}=0\quad\text{или}\quad a_1b_1+a_2b_2=0$$

в пространстве

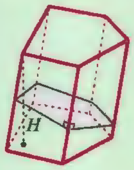
1. Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
2. Координаты $(x; y; z)$ середины отрезка с концами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$
3. Общее уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{n}(a;b;c)$
$$ax+by+cz+d=0$$
4. Уравнение сферы с радиусом R и с центром в точке $(x_0; y_0; z_0)$
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$
5. Если $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора
$$\overline{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$$
модуль вектора
$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
6. Сложение векторов $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)+$
$$+\overline{b}(b_1;b_2;b_3)=\overline{c}(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$$
7. Умножение вектора $\overline{(a_1;a_2;a_3)}$ на число λ
$$\overline{(a_1;a_2;a_3)}\,\lambda=\overline{(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)}$$
8. Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$
$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\varphi,$$
где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$
9. Скалярное произведение векторов $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$
$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$
10. Косинус угла между векторами $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$
$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$
11. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$
$$\overline{a}\cdot\overline{b}=0\quad\text{или}\quad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

Обозначения:
H – высота,
$S_{бок}$ – площадь боковой поверхности,
$S_{полн}$ – площадь полной поверхности,
V – объём.

Призма

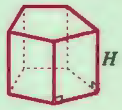
($S_{осн}$ – площадь основания, P – периметр основания)

1. Наклонная призма



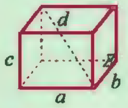
(l – боковое ребро, $P_{сеч}$ – периметр перпендикулярного сечения, $S_{сеч}$ – площадь перпендикулярного сечения)
$$S_{бок}=P_{сеч}\,l;$$
$$V=S_{сеч}\,l=S_{осн}H;$$
$$S_{полн}=S_{бок}+2\,S_{осн}$$

2. Прямая призма



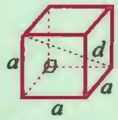
$$S_{бок}=P_{осн}H;$$
$$V=S_{осн}H;$$
$$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}$$

3. Прямоугольный параллелепипед



(a, b, c – его измерения, d – диагональ)
$$d^2=a^2+b^2+c^2;$$
$$V=abc;$$
$$S_{полн}=2(ab+bc+ac)$$

4. Куб

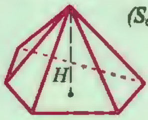


(a – ребро)
$$d=a\sqrt{3};\quad V=a^3;$$
$$S_{полн}=6a^2$$

Пирамида

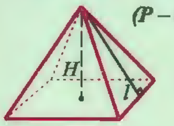
(l – апофема)

1. Произвольная пирамида



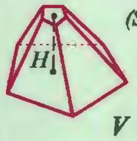
($S_{осн}$ – площадь основания)
$$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}$$
$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$$

2. Правильная пирамида



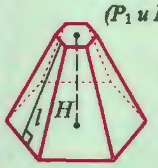
(P – периметр основания)
$$S_{бок}=\frac{1}{2}P\cdot l$$

3. Произвольная усечённая пирамида



(S_1 и S_2 – площади оснований)
$$S_{полн}=S_{бок}+S_1+S_2;$$
$$V=\frac{1}{3}H\cdot\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)$$

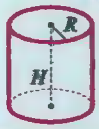
4. Правильная усечённая пирамида



(P_1 и P_2 – периметры оснований)
$$S_{бок}=\frac{1}{2}(P_1+P_2)\cdot l$$

Тела вращения

Цилиндр



(R – радиус основания цилиндра)
$$S_{бок}=2\pi RH;\quad V=\pi R^2H;$$
$$S_{полн}=2\pi R(R+H)$$

Конус

(R – радиус основания конуса, l – образующая конуса)
$$S_{бок}=\pi Rl;\quad V=\frac{1}{3}\pi R^2H;$$
$$S_{полн}=\pi R(R+l)$$

Усеченный конус

(R_1 и R_2 – радиусы оснований конуса, l – образующая конуса)
$$S_{полн}=\pi(R_1+R_2)l+\pi(R_1^2+R_2^2)$$

$$S_{бок}=\pi(R_1+R_2)l$$
$$V=\frac{1}{3}\pi H(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)$$

Сфера и шар

$$S_{сферы}=4\pi R^2;$$
$$V_{шара}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Части шара

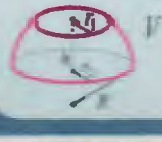
1. Шаровой сегмент *(h – высота сегмента)*

$$V=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right);$$
$$S_{бок}=2\pi Rh$$

2. Шаровой сектор *(h – высота сегмента)*

$$S_{полн}=\pi R\left(2h+\sqrt{2Rh-h^2}\right);$$
$$V=\frac{2}{3}\pi R^2h$$

3. Шаровой слой *(h – высота слоя)*



$$V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi(r_1^2+r_2^2)h;$$
$$S_{бок}=2\pi Rh$$

Информационно-справочная таблица

г. Москва, Каширское шоссе, 21

E-mail: [illegible]@infoplast.ru
http://www.infoplast.ru

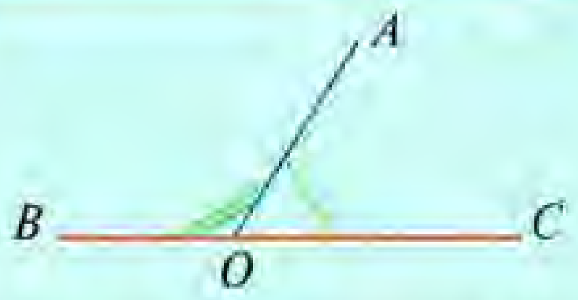
Тел.: [illegible]
Факс: [illegible]
4607061650210

ГЕОМЕТРИЯ

Часть 2

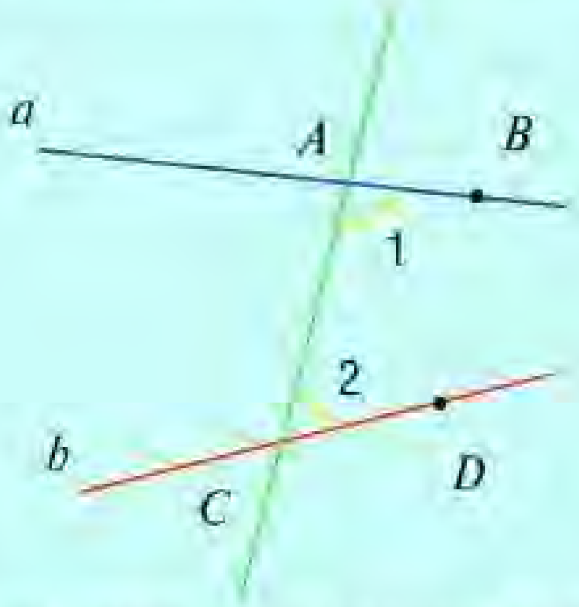
ПЛАНИМЕТРИЯ

Различные виды углов

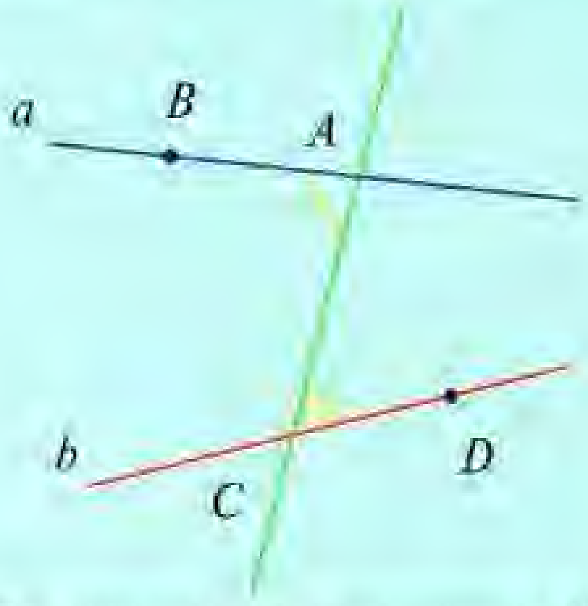


Два угла называются смежными, если у них одна сторона общая, а другие стороны являются дополнительными лучами.
$\angle AOB$ и $\angle AOC$ – смежные углы.
• сумма смежных углов равна 180°

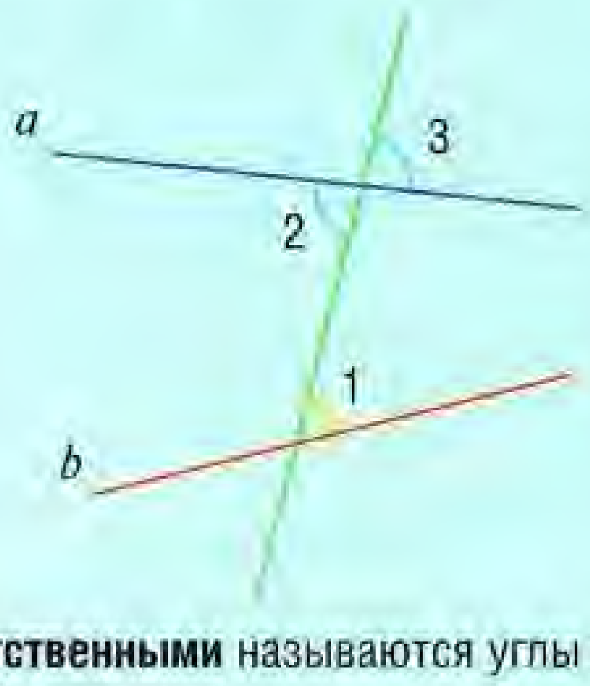
Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого угла.
$\angle AOB$ и $\angle DOC$ вертикальные,
$\angle AOD$ и $\angle BOC$ вертикальные.
• вертикальные углы равны
($\angle AOB = \angle DOC$; $\angle AOD = \angle BOC$).



Прямая AC называется **секущей** по отношению к прямым AB и CD, если она пересекает обе прямые. Если прямая AC является секущей по отношению к прямым AB, CD и, кроме того, точки B и D лежат в одной полуплоскости от секущей AC, то углы BAC и DCA называются **внутренними односторонними**.



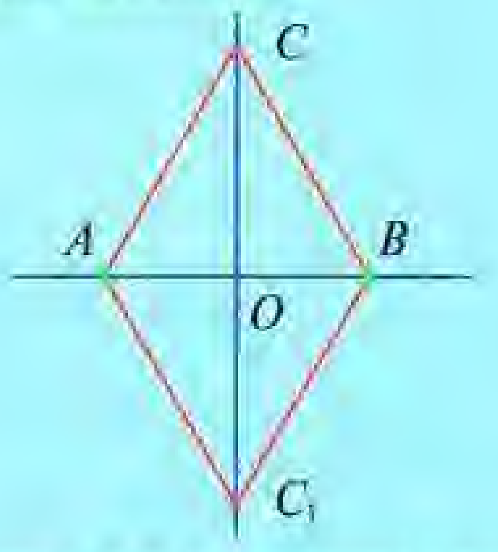
Если AC – секущая по отношению AB и CD, а точки B и D лежат в разных полуплоскостях от AC, то углы BAC и DCA называются **внутренними накрест лежащими**.



Соответственными называются углы прямых a, b с секущей.
Углы 1 и 3 – соответственные.

Построение фигур

Деление отрезка пополам

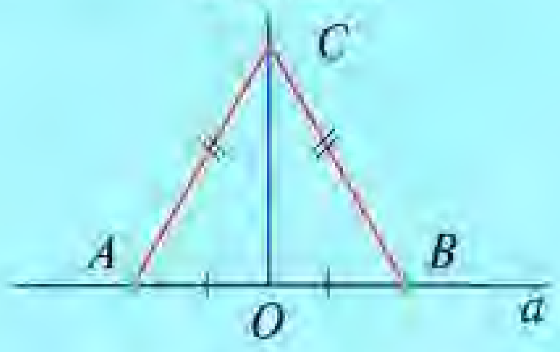


Построение. Из точек A и B циркулем описывается окружность радиусом AB. Пусть C и C_1 – точки пересечения этих окружностей. Они лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB. С помощью линейки соединить точки C и C_1. Отрезок CC_1 пересекает отрезок AB в точке O. Эта точка – середина отрезка AB.

Проведение перпендикуляра к данной прямой

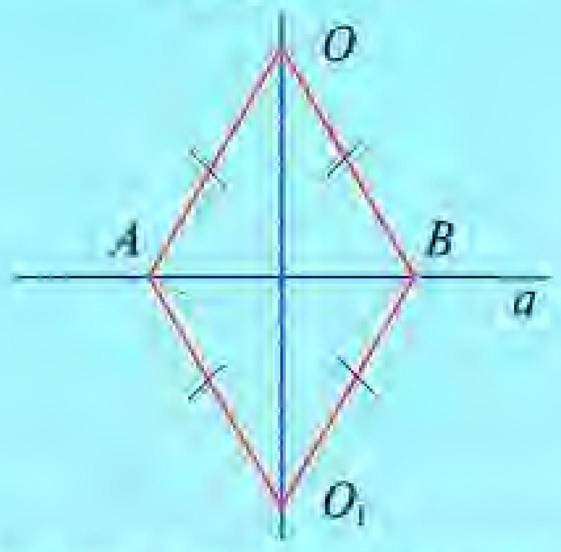
Через точку O провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.
Решение. Возможны два случая:
1) точка O лежит на прямой a;
2) точка O не лежит на прямой a.

Случай 1



Построение. Отложим от точки O по разные стороны от нее на прямой a одинаковые отрезки OA, OB. Проведем две окружности одинакового радиуса AB с центром в точках A и B соответственно. Они пересекаются в точке C. Проведем прямую (OC). Она перпендикулярна прямой a.

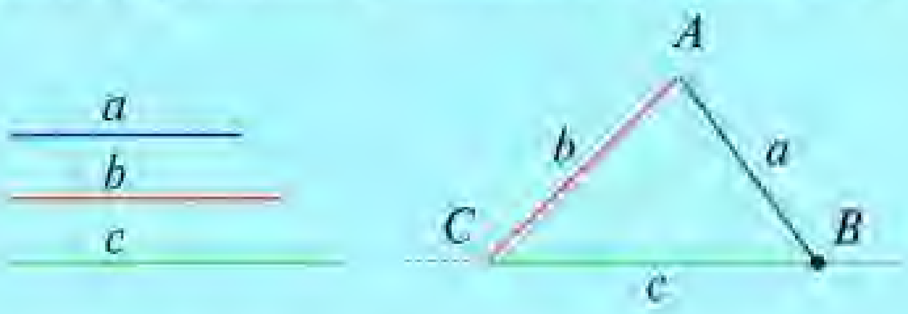
Случай 2



Построение. Проведем окружность с центром в точке O, пересекающую прямую a в двух точках A и B. Проведем две окружности с центрами в точках A и B и радиусом, равным OA. Пусть O_1 – точка пересечения, отличная от точки O, (O и O_1 лежат в разных полуплоскостях). Тогда прямая (OO_1) перпендикулярна данной прямой a.

Построение треугольника по трем сторонам

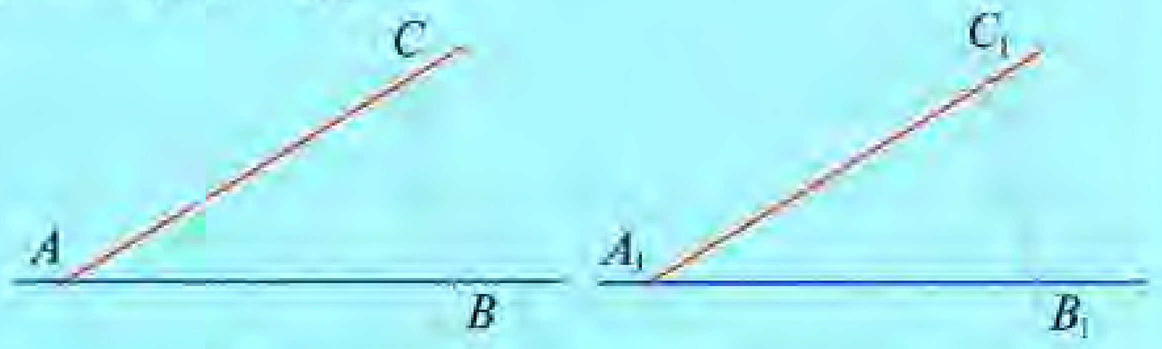
Построить треугольник с данными сторонами a, b, c.



Построение. С помощью линейки проведем произвольную прямую и отметим на ней произвольную точку B. Раствором циркуля, равным c, описываем окружность с центром в точке B и радиусом c. Пусть C – точка ее пересечения с прямой. Далее описываем окружность с центром в точке B радиуса a и с центром в точке C радиуса b. Пусть A – точка пересечения построенных окружностей. Треугольник ABC – искомый.

Построение угла, равного данному

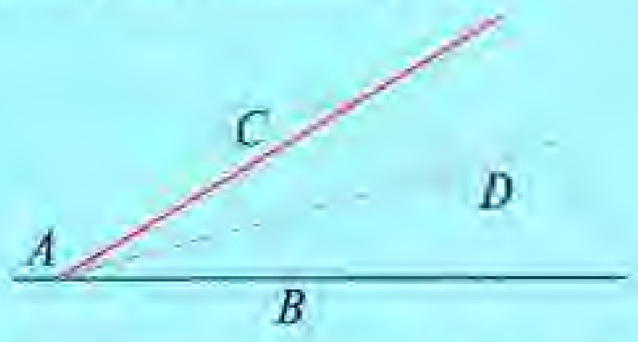
Отложить от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному углу.



Построение. Проведем окружность с центром в вершине данного угла. Пусть B и C – точки пересечения окружности со сторонами угла. Радиусом AB проведем окружность с центром в точке A_1 – начальной точке данного луча. Точку пересечения этой окружности с данным лучом обозначим B_1. Опишем окружность с центром в B_1 и радиусом BC. Точка пересечения C_1 построенных окружностей в указанной полуплоскости лежит на стороне искомого угла.

Построение биссектрисы угла

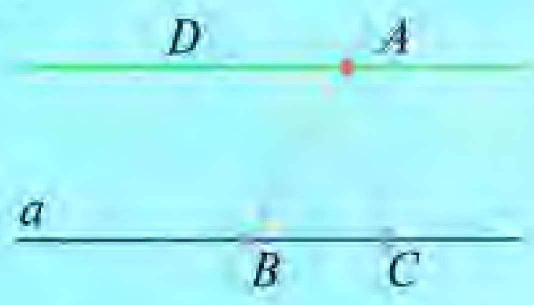
Построить биссектрису данного угла.



Построение. Из вершины O данного угла, как из центра, опишем окружность произвольного радиуса. Пусть B и C – точки пересечения ее со сторонами угла. Построим еще две окружности с тем же радиусом с центрами в B и C. Пусть D – точка их пересечения. Тогда $[AD)$ – искомая биссектриса угла A.

Проведение прямой, параллельной данной

Через заданную точку A провести прямую, параллельную данной прямой a.



Построение. Через заданную точку A и произвольную точку B прямой a проведем прямую AB. Пусть C – произвольная, отличная от B точка прямой a. Построим от луча AB в полуплоскость, не содержащую точку C, угол, равный углу (ABC). Пусть $[AD)$ – сторона построенного угла. Тогда прямая $AD \parallel a$.

Деление отрезка на n равных частей

Разделить данный отрезок AB на n равных частей.
Построение. Пусть $[AB]$ – данный отрезок. Проведем из точки A луч a, не содержащий отрезок AB. Отложим от точки A на построенном луче равные отрезки: AA_1, A_1A_2, ... , $A_{n-1}A_n$. Соединим точки A_n и B. Проведем через точки A_1, A_2, ... , A_{n-1} прямые, параллельные прямой A_nB. Они пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, ... , B_{n-1}. Отрезки AB_1, B_1B_2, ... , $B_{n-1}B$ – искомые отрезки.

По данным отрезкам a, b, c построить отрезок $x = \frac{b \cdot c}{a}$

Построение. Построим любой неразвернутый угол с вершиной O. На одной стороне угла отложим отрезки $OA = a$, $OB = b$, а на другой – отрезок $OC = c$. Соединим точки A и C, а через точку B проведем прямую BD, параллельную (AC), где D – точка пересечения с лучом OC. Отрезок OD – искомый.

Исходные понятия и определения

Задана упорядоченная совокупность из n точек. Точки, номера которых отличаются на единицу, назовем соседними. **Ломаной** $A_1A_2...A_n$ называется фигура, которая состоит из упорядоченной совокупности точек и отрезков, соединяющих соседние среди них. Точки $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **вершинами**, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ – **звеньями** ломаной. Звенья, имеющие общий конец, назовем **смежными**, а точки A_1 и A_n – **концами ломаной**. Ломаная называется **простой**, если несмежные ее звенья не имеют общих точек. Ломаная называется **замкнутой**, если ее концы соединены отрезком. Этот отрезок также называется звеном, а концы ломаной считаются соседними вершинами.

Простая ломаная и ломаные с самопересечением

Простая замкнутая ломаная называется **многоугольником**, если ее смежные звенья не лежат на одной прямой. Вершины ломаной называются **вершинами многоугольника**, а звенья ломаной – **сторонами**. **Диагоналями многоугольника** называются отрезки, соединяющие не соседние вершины многоугольника.

Плоским многоугольником называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником – его **границей**. Точки плоского многоугольника, отличные от точек его границы, называются **внутренними**. **Многоугольной фигурой** называется объединение конечного числа плоских многоугольников. **Многоугольные фигуры не перекрываются**, если они не имеют общих внутренних точек. Многоугольная фигура называется **составленной из данных многоугольных фигур (разбитой на данные многоугольные фигуры)**, если она является их объединением, а сами эти фигуры не перекрываются.

Радиальное измерение угловых величин

$360° = 2\pi$ радиан, $180° = \pi$ радиан

1 рад $= \dfrac{360°}{2\pi} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''$

$1° = \dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$

$A = \dfrac{\pi}{180}\alpha°$ – формула перевода градусной величины угла в радианную;

$\alpha° = \dfrac{180°}{\pi} A$ – формула перевода радианной величины угла в градусную.

Признаки равенства треугольников

Первый признак. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Выпуклый многоугольник

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в одной вершине. Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный углу многоугольника при этой вершине. Выпуклый многоугольник называется **вписанным** в окружность, если все его вершины лежат на некоторой окружности. Многоугольник называется **описанным** около окружности, если все его стороны касаются некоторой окружности.

На рис. слева показан пример замкнутой простой ломаной, которая образует невыпуклый многоугольник. Выпуклый многоугольник изображен на том же рисунке справа. $[A_1A_3]$, $[A_1A_4]$ – его диагонали.

Невыпуклый многоугольник *Выпуклый многоугольник*

Правильный многоугольник

Выпуклый многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны равны и все углы равны. **Центром** правильного многоугольника называется точка, равноудаленная от всех его вершин и всех его сторон. **Центральным углом** правильного многоугольника называется угол, под которым видна сторона из его центра.

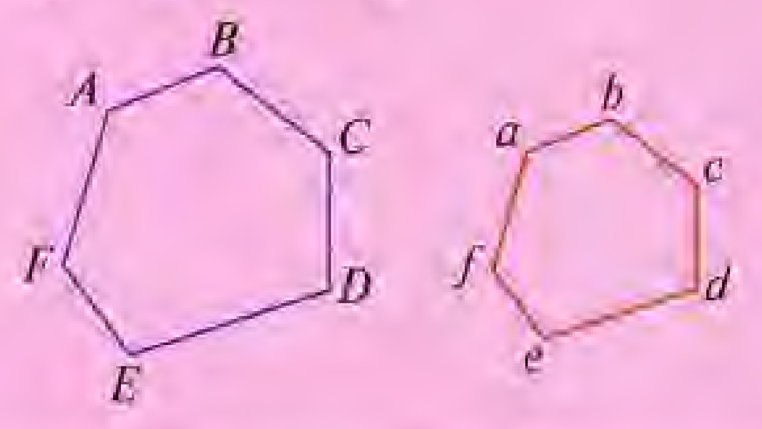
Подобие плоских фигур

Если изменить (увеличить или уменьшить) все размеры плоской фигуры в одно и то же число раз (отношение подобия), то старая и новая фигуры называются подобными.

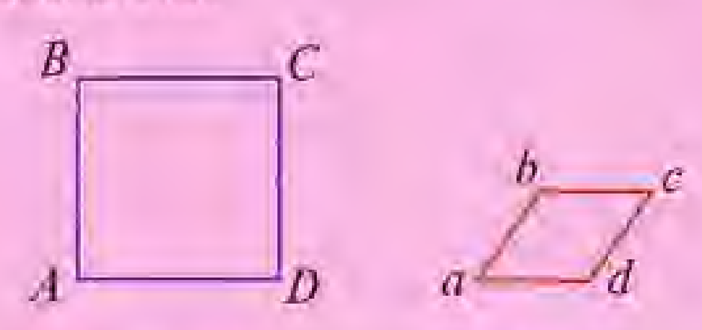
В двух подобных фигурах любые соответственные углы равны, то есть, если точки A, B, C, D одной фигуры соответствуют точкам a, b, c, d другой фигуры, то $\angle ABC = \angle abc$, $\angle BCD = \angle bcd$ и т.д.

Два многоугольника ($ABCDEF$ и $abcdef$, рис.) подобны, если их углы равны: $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, ..., $\angle F = \angle f$, а стороны пропорциональны:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = ... = \frac{FA}{fa}.$$



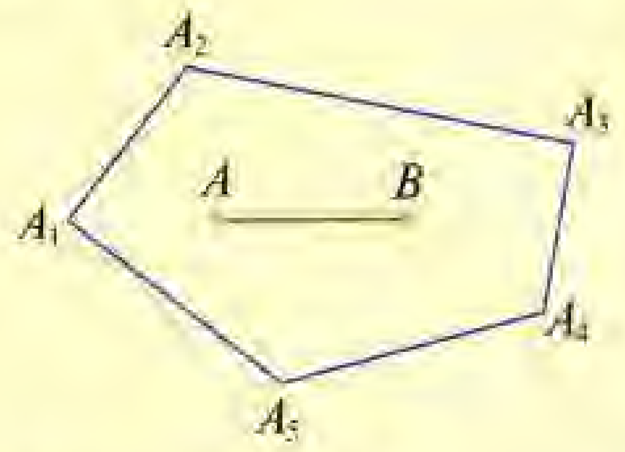
Для подобия многоугольников недостаточно только пропорциональности сторон. Например, квадрат $ABCD$ и ромб $abcd$ (рис.) имеют пропорциональные стороны: каждая сторона квадрата вдвое больше, чем у ромба, однако их диагонали не пропорциональны.



Но для подобия треугольников достаточно пропорциональности их сторон.

Свойства выпуклого многоугольника

Теорема: Отрезок, соединяющий любые две точки выпуклого плоского многоугольника (в частности, любая его диагональ), содержится в этом многоугольнике.



Следствие. Выпуклый плоский многоугольник разбивается на треугольники всеми диагоналями, проведенными из одной (любой) его вершины.

Теорема. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Теорема. Сумма величин внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой его вершине, равна 360°.

Свойства правильного многоугольника

Теорема. Правильный многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности, при этом центры этих окружностей совпадают.

Следствие. Центр правильного многоугольника совпадает с центрами вписанной и описанной окружностей.

Теорема. Сторона a_n правильного n-угольника связана с радиусом R описанной окружности формулой $a_n = 2R\sin\dfrac{180°}{n}$.

Следствие. Периметры правильных n-угольников относятся как радиусы описанных окружностей.

Признаки подобия треугольников

Два треугольника подобны, если:

1) *все их соответственные углы равны (достаточно равенства двух углов);*
2) *все их стороны пропорциональны;*
3) *две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, равны.*

Два прямоугольных треугольника подобны, если:

1) *их катеты пропорциональны;*
2) *катет и гипотенуза одного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе другого;*
3) *два угла одного треугольника равны двум углам другого.*

Информационно-справочная таблица

4607061651989

Подписано в печать 28.12.05. Тираж 4000 экз. Заказ № 3106. Издатель ООО «Инфопласт», Москва, Каширское шоссе, 21. Типография ООО «Вива-Стар», 107023, Москва, ул. Электрозаводская, 20

ГЕОМЕТРИЯ

Часть 3

ПЛАНИМЕТРИЯ

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых **фокусами** эллипса, есть величина постоянная.

Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Здесь начало координат является центром симметрии эллипса, а оси координат – его осями симметрии. При $a > b$ фокусы эллипса лежат на оси OX, при $a < b$ фокусы эллипса лежат на оси OY, а при $a = b$ эллипс становится окружностью (фокусы эллипса в этом случае совпадают с центром окружности). Таким образом, *окружность есть частный случай эллипса*.

Отрезок $F_1F_2 = 2c$, где $c=\sqrt{|a^2-b^2|}$, называется **фокусным расстоянием**. Точки A, B, C и D называются **вершинами эллипса**. Отрезок $AB = 2a$ называется **большой осью эллипса**, а отрезок $CD = 2b$ – **малой осью эллипса**. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\varepsilon<1$ называется **эксцентриситетом эллипса**.

$$F_1M=a+\varepsilon x;\ F_1M=a-\varepsilon x$$

Свойство. Сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная и равная удвоенной большей полуоси.

$$F_1M+F_1M=a+\varepsilon x+a-\varepsilon x=2a$$

Свойство. Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии.

Свойство. Эллипс имеет центр симметрии.

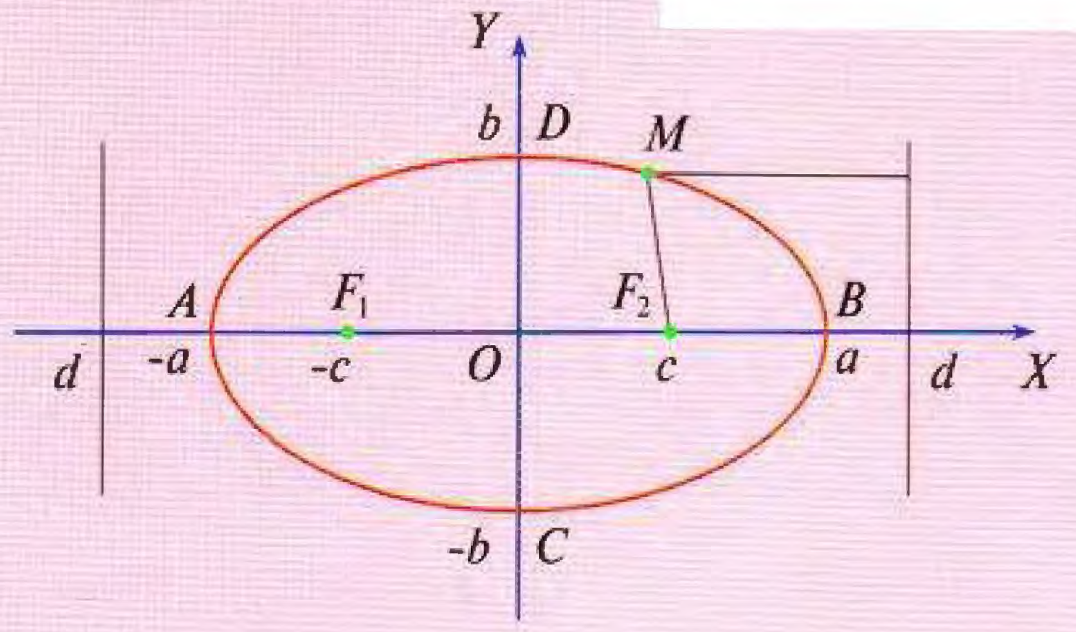
Центр симметрии эллипса называется **центром эллипса**.

Прямая $x = -d$ называется директрисой, соответствующей фокусу $F_1(-c;\ 0)$ где $d=\frac{a}{\varepsilon}>a$. Наряду с этой директрисой вводят прямую $x = d$, которая является директрисой, соответствующей фокусу $F_2(c;\ 0)$.

Пусть $M(x_1,\ y_1)$ – точка эллипса, тогда **уравнение касательной к эллипсу** в данной точке имеет вид: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.

Условие касания прямой $y=mx+k$ **и эллипса** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

$k^2=m^2a^2+b^2$.



Гипербола и ее свойства

Уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Это уравнение называется каноническим уравнением гиперболы.

Свойство. Гипербола не имеет общих точек с осью Oy, а ось Ox пересекает в двух точках $A(-a;\ 0)$ и $B(a;\ 0)$, которые называются **вершинами гиперболы**.

Отрезок AB называется **действительной осью** гиперболы, его длина равна $2a$. Число a называется **действительной полуосью** гиперболы, число b – **мнимой полуосью**.

Свойство. Гипербола имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии.

Свойство. Гипербола имеет центр симметрии.

Центр симметрии гиперболы называют **центром гиперболы**.

Свойство. Гипербола пересекается с прямой $y=kx$ при $|k|<\frac{b}{a}$ в двух точках. Если $|k|\geq\frac{b}{a}$ то общих точек у прямой и гиперболы нет.

Точки $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$ называются **фокусами гиперболы**. Здесь $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

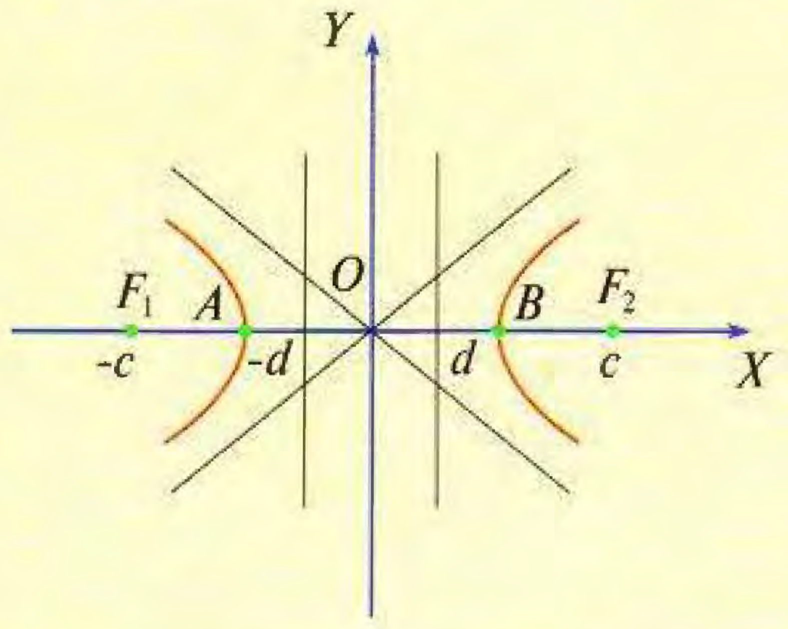
Величина ε называется **эксцентриситетом гиперболы**.

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1$$

Чем меньше эксцентриситет, тем более гипербола сжата к оси Ox.

Обозначим $d=\frac{a}{\varepsilon}$, то, поскольку для гиперболы $\varepsilon>1$, имеем $d < a$. Прямая $x=d$ называется **директрисой гиперболы**, соответствующей фокусу F_2. Прямую $x=-d$ называют директрисой, соответствующей фокусу F_1.

Вид гиперболы и ее директрис в канонической системе координат приведен на рис.



Парабола и ее свойства

Фигура, каждая точка которой равноудалена от данной точки A и данной прямой l называется параболой.

$$y^2=2px$$

Это уравнение называется каноническим уравнением параболы.

Свойство. Парабола имеет ось симметрии.

Ось симметрии называется **осью параболы**. Точка пересечения параболы с осью называется **вершиной параболы**. Вершина параболы в канонической системе координат находится в начале координат.

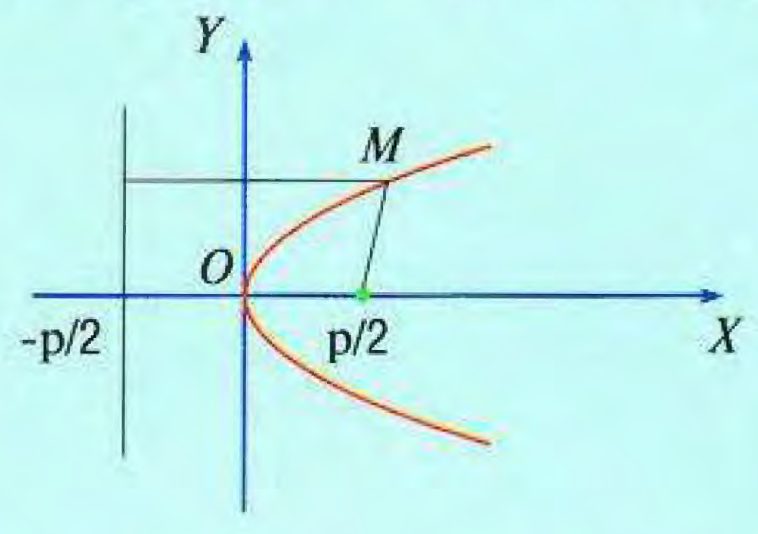
Свойство. Парабола расположена в полуплоскости $x\geq0$.

Точку $\left(\frac{p}{2},0\right)$ называют **фокусом параболы** и обозначают буквой F.

Прямая $x=-\frac{p}{2}$ в канонической системе координат называется **директрисой параболы**. Расстояние от нее до фокуса называется **фокальным параметром** параболы. Очевидно, он равен p. Эксцентриситет параболы по определению полагают равным единице, то есть $\varepsilon=1$.

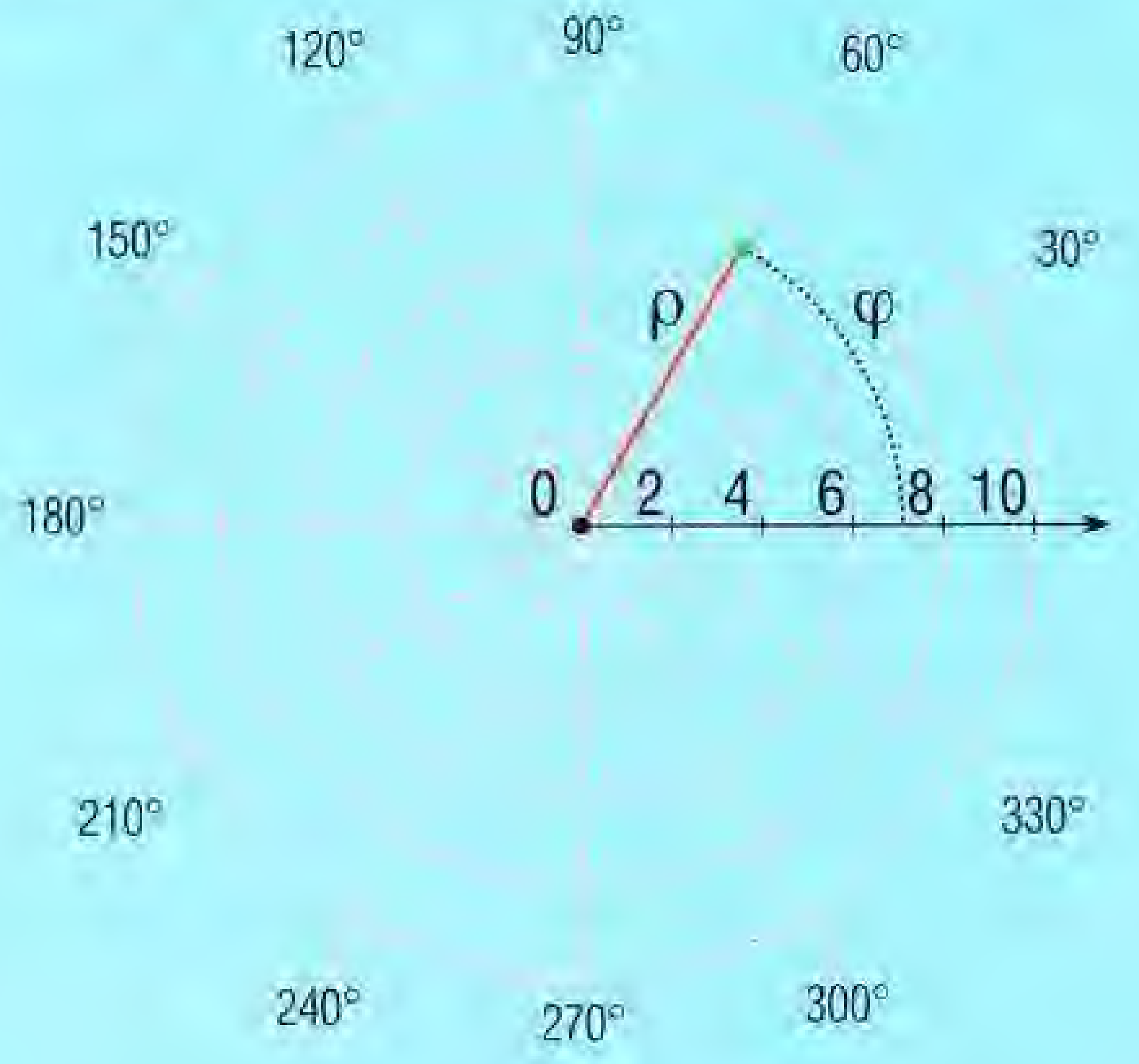
Теперь свойство, через которое мы определили параболу, в новых терминах можно сформулировать следующим образом: любая точка параболы равноудалена от ее фокуса и директрисы.

Вид параболы в канонической системе координат и расположение ее директрисы приведены на рис.



Полярная система координат

Полярная система координат ставит в соответствие каждой точке на плоскости пару чисел $(\rho; \varphi)$. Основными понятиями этой системы являются точка отсчета – полюс – и луч, начинающийся в этой точке, – полярная ось. Координата ρ – расстояние от точки до полюса, координата φ – угол между полярной осью и отрезком, соединяющим полюс и рассматриваемую точку, который берется со знаком «+», если угол от оси до отрезка вычисляется против часовой стрелки, и со знаком «–» в противоположном случае. Важно понимать, что число φ в полярной системе определено не однозначно: парам чисел $(\rho; \varphi + 2\pi n)$ соответствует одна и та же точка при любых натуральных n. Для полюса $\rho = 0$, а угол φ не определен.



Полярная система координат.

Полярные координаты легко преобразовать в декартовы. Пусть $(x; y)$ – координаты точки в декартовой системе координат, $(\rho; \varphi)$ – в полярной. Тогда

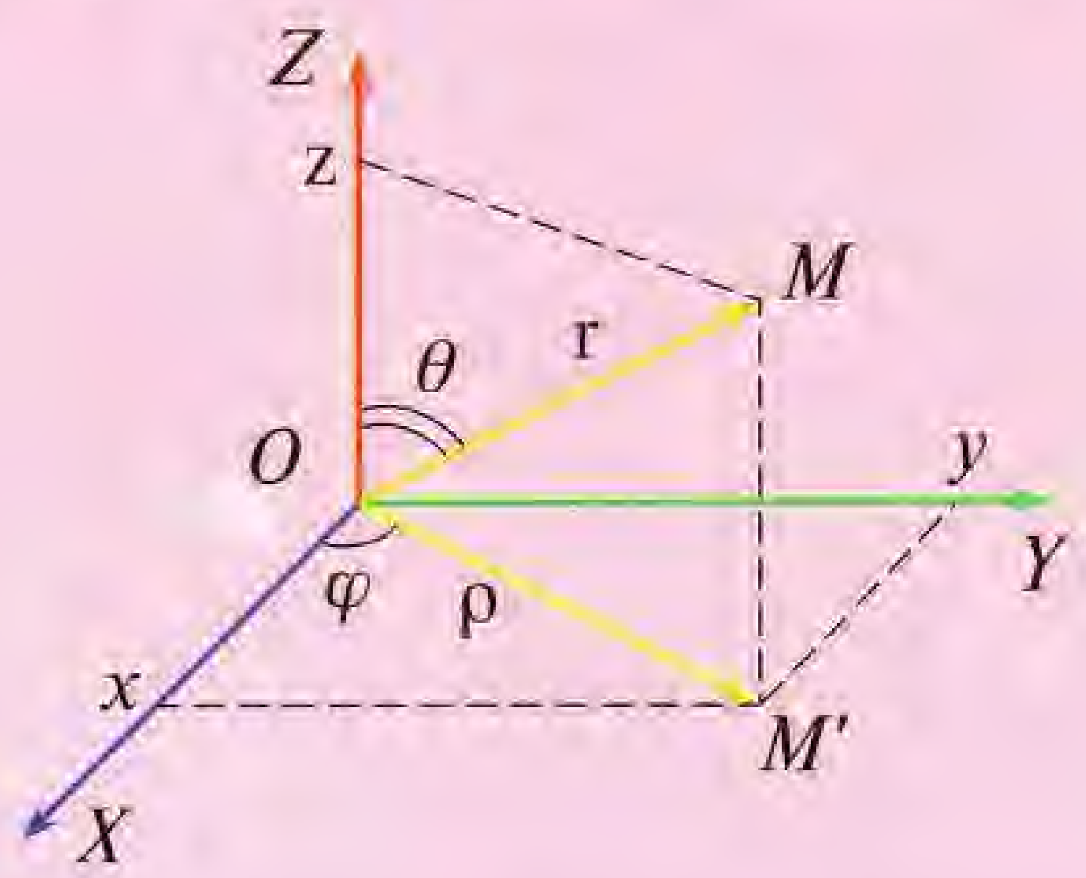
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Формулы обратного перехода:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \begin{cases} \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \ x \neq 0, \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \ x = 0, \ y > 0, \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2}, \ x = 0, \ y < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Цилиндрическая и сферическая системы координат

На рисунке показаны цилиндрические ρ, φ, z и сферические координаты r, θ, φ (полярный радиус, широта и долгота).



Связь с декартовыми координатами следующими формулами преобразования:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \rho\cos\varphi$

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, $y = \rho\sin\varphi$

$z = z$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = r\sin\theta\cos\varphi$

$\cos\varphi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, $z = r\cos\theta$

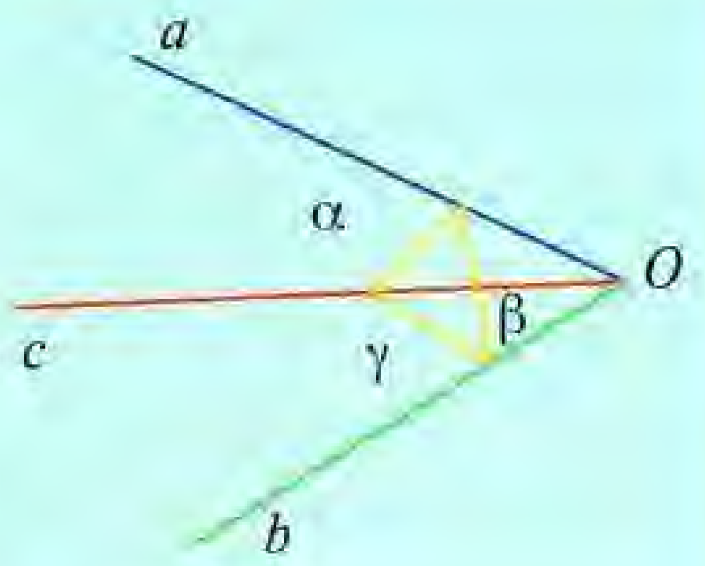
Двугранный угол

Двугранный угол – это часть пространства, заключенная между двумя полуплоскостями, имеющими одну общую границу.

Полуплоскости α и β, образующие двугранный угол, называются его **гранями**. Общая прямая этих граней называется **ребром двугранного угла**. Пусть точки A и B взяты на ребре двугранного угла. Двугранный угол обозначается двумя буквами: угол AB.

Трехгранный угол

Определение: Трехгранный угол – это часть пространства, ограниченная тремя плоскими углами с общей вершиной и попарно общими сторонами, не лежащими в одной плоскости. Общая вершина O этих углов называется **вершиной** трехгранного угла. Стороны углов называются **ребрами**, плоские углы при вершине трехгранного угла называются его **гранями**. Грани трехгранного угла образуют двугранные углы.



Теорема «Неравенство треугольника для трехгранного угла»: Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Теорема: $\alpha + \gamma + \beta < 360°$.

Другими словами, сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360°.

Теорема «Теорема косинусов для трехгранного угла»:

$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$, где α, β, γ – плоские углы, A – двугранный угол, составленный плоскостями углов β и γ.

Замечание. С помощью доказанной теоремы можно вычислить величину двугранного угла, зная плоские углы трехгранного угла:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

Если грани плоских углов взаимно перпендикулярны, получаем формулу трех косинусов: $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$

Теорема «Теорема синусов для трехгранного угла»:

Справедливо равенство $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$

где α, β, γ – плоские углы трехгранного угла; A, B, C – противолежащие им двугранные углы.

Определение: Несколько плоских углов с общим началом O, из которых никакие два не лежат в одной плоскости, образуют **многогранный угол**. Эти плоские углы при вершине многогранного угла называются **гранями**, а стороны этих углов – **ребрами**, точка O – **вершиной многогранного угла**. По числу граней многогранный угол называется трехгранным, четырехгранным и т.д. Если все грани многогранного угла находятся с одной стороны от каждой из плоскостей его граней, угол называется **выпуклым**.

Теорема: Каждый плоский угол многогранного угла меньше суммы всех остальных его плоских углов.

Теорема: Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Информационно-справочная таблица

г. Москва, Каширское шоссе, 21
E-mail: mail@infoplast.ru, http://www.infoplast.ru
Тел.: (095) 320-94-89/88

Подписано в печать 28.12.05. Тираж 4000 экз. Заказ № 3106. Издатель ООО «Инфопласт», Москва, Каширское шоссе, 21. Типография ООО «Вива-Стар», 107023, Москва, ул. Электрозаводская, 20

ОБРАЗОВАНИЕ

ИНФОПЛАСТ™

www.infoplast.ru

ГЕОМЕТРИЯ

Часть 4

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Параллельность прямой и плоскости

Определение. Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Если прямая a параллельна плоскости α, то пишут $a \| \alpha$.

Теорема. «Признак параллельности прямой и плоскости».
Если прямая вне плоскости параллельна какой-нибудь прямой на плоскости, то эта прямая параллельна и самой плоскости.

Теорема. Теорема о следе.
Если плоскость β проходит через прямую a, параллельную плоскости α, и пересекает эту плоскость по прямой b, то $b \| \alpha$.

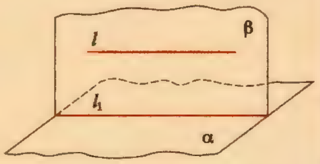


Рисунок 1.
α – некоторая плоскость, l – не лежащая в этой плоскости прямая, l_1 – прямая в плоскости α, параллельная l.

Определение.
Прямую b иногда называют **следом плоскости** β на плоскости α.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение. Прямая называется *перпендикулярной* плоскости, если она перпендикулярна любой прямой из этой плоскости.

Теорема. «Признак перпендикулярности прямой и плоскости».
Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

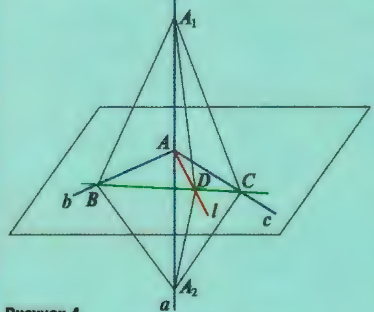


Рисунок 4.
a – прямая, перпендикулярная прямым b и c, лежащим в плоскости P и прямая a проходит через точку A пересечения прямых b и c плоскости P.

Теорема. Плоскость, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и другой.

Теорема. Две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны между собой.

Теорема. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.

Теорема. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны между собой.

Определение. *Перпендикуляром*, проведенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок прямой, перпендикулярной данной плоскости, который соединяет данную точку с точкой плоскости.

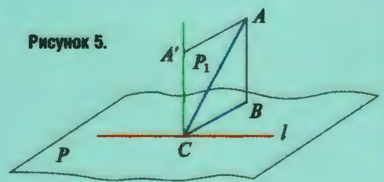
Теорема. Если из одной точки вне плоскости проведены к ней перпендикуляр и наклонные, то:

- длина перпендикуляра меньше длины любой наклонной;
- наклонные с равными проекциями равны;
- из двух наклонных большую длину имеет та, у которой больше проекция.

Теорема. «О трех перпендикулярах».
Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Пусть AC – наклонная прямая к плоскости P, BC – проекция прямой AC на плоскость P, т.е. $BC \in P$, прямая BC перпендикулярна прямой l, лежащей в этой плоскости. Требуется доказать, что наклонная AC также перпендикулярна прямой l.

Рисунок 5.



Теорема (обратная). Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Пусть $l \perp CA$, $l \in P$, требуется доказать, что $l \perp CB$, где $CB \in P$ и является проекцией прямой CA на плоскость P.

Параллельность двух плоскостей

Определение. Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Теорема. «Признак параллельности плоскостей».
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

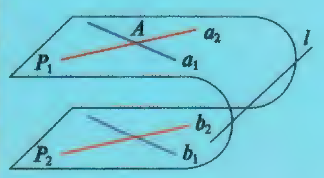


Рисунок 2.
P_1 и P_2 – данные плоскости;
a_1 и a_2 – прямые в плоскости P_1, пересекающиеся в точке A;
b_1 и b_2 – соответственно параллельные им прямые в плоскости P_2.

Теорема. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то она оставляет на этих плоскостях параллельные следы.

Теорема. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Доказательство. Проведем в данной плоскости P какие-либо две пересекающиеся прямые a и b. Через точку A проведем параллельные им прямые a_1 и b_1. Плоскость P_1, проходящая через прямые a_1 и b_1, параллельна плоскости P.

Допустим, что через точку A проходит другая плоскость P_2, тоже параллельная плоскости P. Отметим на ней какую-либо точку C, не лежащую в плоскости P_1. Проведем плоскость α через точки A, C и какую-либо точку B плоскости P. Плоскость α пересечет плоскости P, P_1 и P_2 по прямым b, a и c. Прямые a и c не пересекают прямую b, так как не пересекают плоскость P. Следовательно, они параллельны прямой b. Но в плоскости α через точку A может проходить только одна прямая, параллельная прямой b. Получено противоречие.

Теорема. Отрезки параллельных прямых, ограниченные двумя параллельными плоскостями, равны.

Теорема. Два угла с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны и лежат в параллельных плоскостях.

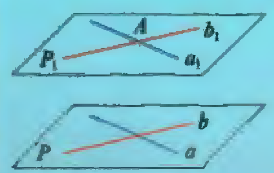
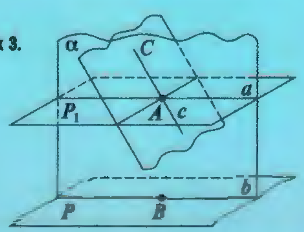


Рисунок 3.



Перпендикулярность двух плоскостей

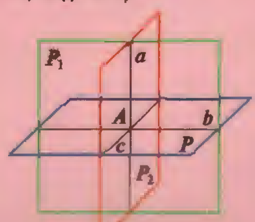
Определение. *Две* пересекающиеся *плоскости* называются *перпендикулярными*, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Теорема. «Признак перпендикулярности двух плоскостей».
Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Рисунок 6.
a – прямая, перпендикулярная плоскости P;
P_1 – плоскость, проходящая через прямую a;
b – прямая, по которой пересекаются плоскости P и P_1.
Показать, что плоскости P и P_1 перпендикулярны.

Теорема. Если плоскости α и β взаимно перпендикулярны, и к плоскости α проведен перпендикуляр, имеющий общую точку с плоскостью β, то этот перпендикуляр лежит в плоскости β.

Теорема. Пусть плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ и пересекаются по прямой a, тогда $a \perp \gamma$.



Теорема об общем перпендикуляре двух скрещивающихся прямых

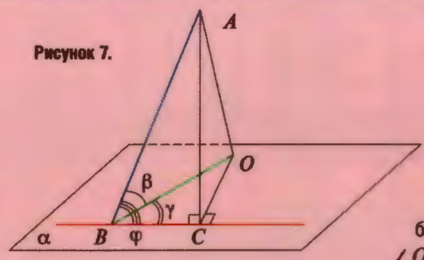
Определение. *Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых* называется отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный каждой из этих прямых.

Теорема. Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом единственный.

Лемма. Две скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях.

Определение. *Углом между наклонной и плоскостью* называется угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость.

Рисунок 7.



На рисунке 7 показана наклонная AB, $OB = Пр_\alpha AB$, $\angle ABO$ – угол между наклонной AB и плоскостью α. Если прямая параллельна плоскости, то угол между ними по определению равен 0°. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90°. Если β – угол между прямой и плоскостью, то $0° < \beta < 90°$. Проведем в плоскости α произвольную прямую b через точку B так, чтобы $OC \perp b$. Пусть $\angle ABO = \beta$, $\angle OBC = \gamma$, $\angle ABC = \varphi$. Рассматривая прямоугольные треугольники ABO, OBC, ACB, имеем

$$\cos\beta = \frac{OB}{AB},\ \cos\gamma = \frac{BC}{OB},\ \cos\varphi = \frac{BC}{AB}.$$

Заметим, что: $\frac{BC}{AB} = \frac{OB}{AB}\cdot\frac{BC}{OB}$ или $\cos\varphi = \cos\beta\cdot\cos\gamma$.

Мы получили **формулу трех косинусов**. Обратите внимание на то, что плоскости углов β и γ взаимно перпендикулярны.

Замечание. Поскольку углы φ, β и γ острые, из формулы трех косинусов следует, что $\cos\beta > \cos\varphi$ и $0° < \beta < \varphi$.

Таким образом, углом β между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость является наименьший из углов, образованных наклонной с прямыми плоскости α.

Ортогональное проектирование

Определение. Параллельное проектирование, при котором проектирующие прямые перпендикулярны к плоскости проекций, называется *ортогональным проектированием*.

Теорема. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции: $S_{пр} = S\cos\varphi$.

Параллельность прямых

Определение. Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Определение. Прямые, которые не имеют общих точек и не параллельны, называются *скрещивающимися*.

Теорема. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.

Замечание. Согласно определению, две параллельные прямые лежат в одной плоскости. Легко заметить, что через две параллельные прямые можно провести только одну плоскость.

Теорема. «Признак скрещивающихся прямых». Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти две прямые скрещиваются.

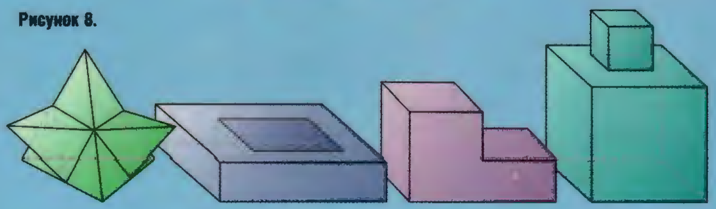
Основные понятия

Многогранником в трехмерном пространстве называется совокупность конечного числа плоских многоугольников такая, что:

- каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (но только одного), называемого *смежным* с первым по этой стороне;
- от любого из многоугольников, составляющих многогранник, можно дойти до любого из них, переходя по очереди от одного многоугольника к другому, смежному с ним.

Многоугольники, из которых состоят многогранники, называются *гранями*, их стороны – *ребрами*, а их вершины – *вершинами* многогранника.

Рисунок 8.



На рисунке 8 приведены некоторые примеры многогранников.

Определение. Многогранник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от плоскости любой его грани.

Из этого определения следует, что все грани выпуклого многогранника являются плоскими выпуклыми многоугольниками. Поверхность выпуклого многогранника состоит из граней, которые лежат в разных плоскостях. При этом ребрами многогранника являются стороны многоугольников, вершинами многогранника – вершины граней, плоскими углами многогранника – углы многоугольников-граней.

Определение. Выпуклый многогранник, все вершины которого лежат в двух параллельных плоскостях, называется *призматоидом*.

Призма, *пирамида* и *усеченная пирамида* – частные случаи призматоида. Все боковые грани призматоида являются треугольниками или четырехугольниками, причем четырехугольные грани – это трапеции или параллелограммы.

Теорема Симпсона.

Объем V призматоида можно найти по формуле: $V = \frac{1}{6}H(S_1 + 4S + S_2)$,

где H – его высота (расстояние между плоскостями оснований), S_1 и S_2 – площади оснований, S – площадь *среднего сечения* (сечения, параллельного плоскостям оснований и делящего высоту пополам).

Определение правильного многогранника

Среди плоских многоугольников особое место занимают правильные многоугольники. Существуют ли «правильные многогранники», и что это такое?

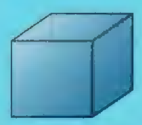
Еще в древней Греции были известны пять удивительных многогранников.

Определение. Многогранник называется *правильным*, если все его грани – равные между собой правильные многоугольники, из каждой его вершины выходит одинаковое число ребер и все двугранные углы равны.

Теорема. Существует не более пяти различных видов правильных многогранников.

Правильные многогранники.

Обозначения: a – ребро, H – высота, S – площадь поверхности, V – объем, R – радиус описанной сферы, r – радиус вписанной сферы.

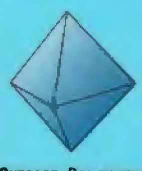


Куб. Все шесть граней – квадраты. Имеет восемь вершин и 12 ребер.

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$
$$r = \frac{a}{2}$$
$$S = 6a^2$$
$$V = a^3$$

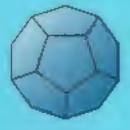
Тетраэдр. Все четыре грани – равносторонние треугольники. Имеет четыре вершины и шесть ребер.

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$$
$$r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$
$$S = a^2\sqrt{3}$$
$$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$



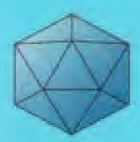
Октаэдр. Все восемь граней – равносторонние треугольники. Имеет шесть вершин и 12 ребер.

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$
$$r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$
$$S = 2a^2\sqrt{3}$$
$$V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$$



Додекаэдр. Все 12 граней – правильные пятиугольники. Имеет 20 вершин и 30 ребер.

$$R = \frac{a}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{3}$$
$$r = \frac{a}{4}\sqrt{10+\frac{22}{\sqrt{5}}}$$
$$S = 3a^2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$$
$$V = \frac{a^3}{4}\sqrt{15+7\sqrt{5}}$$



Икосаэдр. Все 20 граней – равносторонние треугольники. Имеет 12 вершин и 30 ребер.

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}$$
$$r = \frac{a}{4\sqrt{3}}\left(3+\sqrt{5}\right)$$
$$S = 5a^2\sqrt{3}$$
$$V = \frac{5a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$$

Правильная n-угольная пирамида

Пусть $SA_1A_2 \ldots A_n$ – правильная n-угольная пирамида. Введем следующие обозначения:

- α – угол наклона бокового ребра к плоскости основания;
- β – двугранный угол при основании;
- γ – плоский угол при вершине;
- δ – двугранный угол при боковом ребре.

Тогда справедливы соотношения:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \cos\frac{\pi}{n}\cdot\mathrm{tg}\,\beta;\quad \cos\alpha = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{n}{2}};$$

$$\sin\alpha = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\delta}{2};\quad \cos\beta = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}\cdot\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2};$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\delta}{2}};\quad \sin\beta = \frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Информационно-справочная таблица

г. Москва, Каширское шоссе, 21

E-mail: mail@infoplast.ru, http://www.infoplast.ru

Тел.: (095) 320-94-89/88